

135

RÉCIPROQUES
DE LA GÉOMÉTRIE.

RÉCIPROQUES
DE LA GÉOMÉTRIE,

SUIVIES

D'UN RECUEIL DE THÉORÈMES
ET DE PROBLÈMES;

PAR J.-G. GARNIER,

Ancien Professeur à l'École Polytechnique, Docteur de la Faculté des Sciences à l'Université Impériale, et Instituteur à Paris.

SECONDE ÉDITION.

L'Arithmétique et la Géométrie sont
les deux ailes des Mathématiques.

PARIS,

Chez COURCIER, Imprim.-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1810.

Ouvrages de M. GARNIER, *qui se trouvent chez* M. COURCIER, *imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.*

Traité d'Arithmétique à l'usage des Elèves de tout âge, seconde édition, vol. in-8°. 1808. Prix,	2 f. 50 c.
Elémens d'Algèbre à l'usage des aspirans à l'Ecole Polytechnique, seconde édition, 1 vol in-8°,	5 f.
Seconde section de l'Algèbre, deuxième édition, la première ayant paru format in-4°.	4 f.
Les Réciproques de la Géométrie, suivies d'un recueil de *Théorèmes et de Problèmes*, seconde édition, avec 12 planches,	5 f. 50 c.
Elémens de Géométrie analytique, ouvrage de 300 pages, 1 vol. in-8°, avec 9 planches;	4 f.
Recherches analytiques consignées dans un ouvrage sur la courbe trisectrice, faisant avec l'ouvrage 1 vol. in-8°, avec 3 planches,	2 f. 50 c.
Notes sur l'Algèbre de Bezout, faisant avec l'algèbre 1 vol. in-8°,	5 f.
Notes sur le premier volume de l'Algèbre d'Euler; le second volume contient les notes du sénateur *Lagrange*,	12 f.
Ouvrage sur le Compas de proportion, suivi d'un *Traité de la division des champs*, in-12,	4 fr. 50 c.

AVERTISSEMENT.

La première Édition de cet Ouvrage dont je ne dois revendiquer qu'une faible portion, offrait un grand nombre d'incorrections, d'erreurs graves, et laissait dans ses deux parties beaucoup à desirer. J'aurais fait disparaître ces imperfections, si j'avais eu le temps de revoir le manuscrit et de suivre la correction des épreuves.

Cette seconde Édition n'a, pour ainsi dire, de commun avec la précédente, que le titre : dans la première Partie, j'ai rectifié et ajouté plusieurs démonstrations : j'ai de plus considérablement augmenté la seconde Partie, c'est-à-dire le recueil des Théorèmes et Problèmes, en élaguant cependant les solutions analytiques étrangères à cet Ouvrage.

La solution des Problèmes ne peut laisser le moindre doute sur la nécessité des réciproques ; nous nous dispenserons donc de justifier cette section de l'Ouvrage, ce que nous ne pourrions faire sans entrer dans une discussion qui, sans intérêt pour les Élèves, pourrait être regardée comme une critique de Traités sur lesquels nous partageons bien sincèrement l'opinion générale. Nous nous bornerons donc à dire que *La Chapelle*, dans ses *Institutions de Géométrie*, vol. premier, page 337, note, après avoir longuement blâmé les Auteurs de Géométrie, *qui ont*,

dit-il, *extrêmement négligé la démonstration des propositions inverses*, termine par cette observation : *il est remarquable qu'un grand nombre de Problèmes de Géométrie, est fondée sur la vérité des propositions inverses*. Au moins l'accueil fait à la première Édition nous permet-il de penser que ce complément de la Géométrie n'a pas été jugé inutile.

Disons un mot sur la position des énoncés réciproques. *Les données de l'énoncé direct doivent être prises pour inconnues dans l'énoncé inverse, et réciproquement*. Si donc, dans la proposition directe, les données sont en plus grand nombre que les inconnues, dans la proposition inverse les inconnues seront en plus grand nombre que les données; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsque plusieurs figures jouissent de la même propriété : alors cette propriété ne caractérisant pas plutôt l'une de ces figures que l'autre, la réciproque n'a pas lieu. Ainsi telle proposition peut n'admettre qu'une inverse, telle autre en comporte plusieurs; enfin la même inverse peut convenir à plusieurs propositions.

On peut penser que la première Partie de cet Ouvrage, pour être utile à la généralité des Élèves, aurait dû porter sur les Traités de Géométrie entre lesquels on se partage aujourd'hui; mais nous observerons que notre véritable but ayant été d'offrir le modèle d'un travail à faire par tous ceux qui voudront étudier scrupuleusement la Géométrie, trop négligée de nos jours, et en faire des applications, nous

avons dû faire choix du Traité (*) regardé comme le plus complet et le plus répandu.

Quelques professeurs disent qu'il ne faut pas donner aux Élèves des problèmes résolus. Je réponds, 1° que le champ des questions ne peut être complètement moissonné; 2° qu'il faut d'abord apprendre à mettre en œuvre les matériaux acquis, ce qu'on ne peut faire qu'en étudiant des solutions dont la marche diffère essentiellement de celle de la démonstration; 3° que les Élèves qui veulent s'exercer, peuvent prendre un énoncé dans la Table des Matières, et comparer leur solution avec celle du texte; 4° enfin que c'est moins du nombre que du choix des Problèmes que doit jaillir l'instruction.

Je n'ai rien négligé pour rendre cet Ouvrage correct et instructif : mais aussi je dois des remercîmens particuliers à M. *Cach*, répétiteur de Mathématiques au Lycée d'Orléans, et à MM. *Henry* et *Douzon*, maintenant Élèves de l'École Polytechnique, qui m'ont aidé de leurs conseils et de leurs recherches.

(*) La *Géométrie* de *Legendre*, 7ème édition.

TABLE DES MATIÈRES.

RÉCIPROQUES.

LIVRE PREMIER.

PROPOSIT. Ire. Théorème. Toutes les fois que deux droites se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux (Géom., Prop. V, Théor.)

Réciproque. Si quatre lignes droites qui aboutissent à un même point, sont disposées de manière que les angles opposés au sommet soient égaux, ces quatre lignes formeront deux droites.

Corollaire.

PROPOSIT. II. Théorème. Si d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène des droites aux extrémités d'un même côté, la somme de ces droites sera moindre que celle des côtés enveloppans (Géom., Prop. IX).

Réciproque. Si la somme des droites qui joignent un point pris dans le plan d'un triangle, avec les extrémités d'un côté, est moindre que celle des deux autres côtés ou des côtés enveloppans, ce point est intérieur au triangle.

PROPOSIT. III. Théorème. Si deux triangles sont tels que deux côtés du premier soient égaux à deux côtés du second, et qu'en même temps l'angle compris par les premiers, soit plus grand que l'angle compris par les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second (Géom., Prop. X).

Réciproque. Si deux triangles sont tels que deux côtés du premier soient égaux à deux côtés du second, et qu'en même temps le troisième côté du premier soit plus grand que le troisième côté du second, l'angle opposé au troisième côté dans le premier triangle, sera plus grand que l'angle opposé au troisième côté dans le second triangle.

PROPOSIT. IV. Théorème. La ligne menée du sommet d'un triangle isoscèle au milieu de la base, est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales (Géom., Prop. XII, Schol.).

LIVRE III.

semblables entre eux et au triangle total, le triangle total est rectangle.

PROPOS. XIII. Théorème. Si du sommet d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment adjacent (Géom., *ibid.*, 2°).

Réciproque. Si du sommet B d'un triangle, on abaisse une perpendiculaire sur sa base, et que chacun des côtés adjacens au sommet B, soit moyen proportionnel entre la base et le segment contigu au côté, le triangle sera rectangle en B.

PROPOS. XIV. Théorème. Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse (Géom., Prop. XXIII, Théor., 3°).

Réciproque. Si la perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle sur le côté opposé, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de cette base, l'angle d'où part la perpendiculaire est droit.

PROPOSIT. XV. Théorème. Deux triangles qui ont un angle égal, sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal (Géom., Prop. XXIV, Théor.).

Réciproque. Si deux triangles sont entre eux comme les rectangles de deux de leurs côtés contigus, les angles compris par ces côtés sont égaux.

PROPOSIT. XVI. Théorème. Deux triangles semblables sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues (Géom., Prop. XXV).

Réciproque. Si deux triangles sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés respectifs, ils sont semblables.

PROPOS. XVII. Théorème. Les contours des polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues (Géom., Prop. XXVII, Théor.).

Réciproque. Si les contours de deux polygones sont comme leurs côtés homologues, ces polygones sont semblables.

PROPOS. XVIII. Théorème. Les surfaces des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues (Géom., Prop. XXVII, Théor., 2°).

Réciproque. Si les surfaces de deux polygones sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues, ces polygones seront semblables.

PROPOSIT. XIX. Théorème. Si sur les trois côtés d'un triangle rectangle, comme côtés homologues, on construit trois figures semblables, celle formée sur l'hypoténuse est équivalente à la

LIVRE IV.

LIVRE V.

LIVRE VI.

LIVRE VII.

LIVRE VIII.

RECUEIL
DE THÉORÈMES ET DE PROBLÈMES.

Sur les Lignes et sur les Triangles.

Problème Ier. Fig. 66, 67 et 68. Deux droites et un point étant donnés, mener par le point une droite qui aille passer par le point de concours des deux droites. Seconde construction à démontrer.

Théorème Ier. Fig. 69. Si à partir du sommet A d'un triangle ABC, on divise chacun des côtés contigus AB, AC en un même nombre parties telles, que l'on ait

AD : AE :: DF : EG :: FH : GI :: HB : IC,

et qu'on joigne les points B et C avec les points de division, correspondans, par les droites BE et CD, BG et CF, BI et CH, toutes ces droites se couperont deux à deux sur la ligne menée du sommet du triangle au milieu de la base.

Fig. 70. *Corollaire*. Les droites menées des trois sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, concourent en un même point.

Problème II. Démonstration directe de cette proposition.

Fig. 71. Soient D, E, F les milieux des trois côtés d'un triangle quelconque ABC, formons le triangle DEF : soient G, H, I les milieux des trois côtés de ce nouveau triangle, qui donnent le triangle GHI ; formons de la même manière un troisième triangle KLM, et ainsi de suite indéfiniment : on demande un triangle dont la surface soit la limite de la somme des surfaces des triangles DEF, GHI, KLM, etc.

Corollaire. Les droites menées des trois sommets d'un triangle aux milieux des côtés opposés, se coupent en un même point.

Fig. 70. Autre démonstration de cette propriété.

Théorème II. Fig. 70. Soient D, E, F les milieux des trois côtés AB, AC, BC d'un triangle quelconque, si on les joint avec les sommets des angles opposés, ces lignes se couperont en O, et on aura

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = \tfrac{1}{3}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2\right).$$

Corollaire.

Division des Quadrilatères.

Du Cercle.

Questions à résoudre.

Des Périmètres et des Aires de quelques Polygones réguliers. Quadrature de quelques espaces limités par des arcs de Cercle et des droites.

Division des Surfaces.

Sur les Plans.

On propose la solution des questions suivantes qui ne sont pas énoncées dans l'ouvrage.

Les angles formés par une droite quelconque, avec des plans parallèles, sont égaux.

Si par un point d'une droite on mène un plan perpendiculaire à cette droite, et des perpendiculaires à cette droite, ces perpendiculaires seront dans le plan.

Une droite est perpendiculaire à un plan, lorsqu'elle forme des angles égaux avec trois droites menées par son pié, dans le plan.

Par un point pris sur une droite ou hors d'une droite, mener un plan perpendiculaire à cette droite : on n'en peut mener qu'un.

Deux plans sont parallèles, lorsqu'étant perpendiculaires chacun à une ligne droite, ces deux droites sont parallèles : si les deux droites ne sont pas parallèles, les plans se coupent.

Lorsque par plusieurs points d'un même plan MN, on mène hors de ce plan des droites égales et parallèles, les extrémités de ces droites sont dans un même plan parallèle au plan MN.

Si on a dans un plan MN deux droites parallèles et inégales AB, CD, que par les extrémités A et B, C et D on mène hors du plan quatre parallèles AA′, BB′, CC′, DD′, et qu'on prenne AA′ = BB′, je dis que tout plan mené par A′ et B′ coupera les parallèles CC′, DD′ à même hauteur au-dessus du plan MN ; en second lieu, si on prend AA′ = BB′, CC′ = DD′, les quatre points A′, B′, C′, D′ seront dans un même plan

Lorsqu'une droite est parallèle à un plan MN, si par un point quelconque de la droite, on mène un plan parallèle à MN, la droite sera toute entière dans le plan parallèle.

Lorsqu'une droite est parallèle à un plan MN, si par un point de ce plan on mène une parallèle à la droite, elle sera toute entière dans le plan MN.

Lorsqu'une droite n'est pas perpendiculaire à un plan

Introduction à la Géométrie descriptive.

Sur la Pyramide triangulaire.

Des Polyèdres.

De la Polygonométrie et de la Polyédrométrie.

Sur le levé des plans.

De la trisection de l'angle ou de la courbe trisectrice.

NOTES.

FIN DE LA TABLE.

FAUTES A CORRIGER.

Nota. Il est essentiel de corriger d'avance les indications des Figures.

Pages	Lignes.	Fautes.	Corrections.
18	12 en remontant	au segment AB	au segment AD.
29	5	si la surface..............	si les surfaces.
35	4	et lui est circonscrit.......	et lui être circonscrit.
60	10	les bases seront égales et parallèles,.............	les bases seront parallèles.
75	avant-dernière	les conséquences par 2....	les conséquens par 2.
112	indicat. de fig.	....	Fig. 115. 1°.
113	*idem*	....	Fig. 115. 2°.
115	dernière	$n : m :: RM : RM' ::$...	$n : m :: RM : R'M ::$
122	10 en remontant	et par A' l'arc C*b*.......	et par A' l'art BC*b*.
154	11	des côtés A, B, C........	des côtes du triangle ABC.
160	8 en remontant	deux demi-cercles ABC; DEF..................	deux demi-cercles concentriques ABC, DEF.
161	1re et 2e indications de fig.	....	Fig. 171. 1°. Fig. 171. 2°.
167	8 en remontant	au point de tangence M des cercles................	au point de tangence des cercles.
184	15	N"MMN"...............	N"NMM".
187	1re et 2e indications de fig.	....	Fig. 194. 1°. Fig. 194. 2°.
190	11	(Théor. XXXXVIII et XXXXIV)............	(Théorèmes XXXXIII et XXXXIV).
193	4 en remontant	Y'A'X..................	Y'A'Z'.
203	dernière	$p = 1\ P$..................	$p = \frac{1}{3}\ P$.
213	7	la face illimitée prolongée..,	la face illimitée, prolongée.
227	9	$= \overline{AB}^3 - \overline{BI}^2 -$..........	$= \overline{AB}^3 - \overline{BI}^3 -$.
229	5	C'C' étaient..............	B'C' étaient.
298	10 en remontant	$a =$....................	$a^2 =$.
313	3 en remontant	quelconque ABC,.........	quelconque ABC,
320	dernière	la corde AC..............	la corde AC'.
321	5 en remontant	de BC (fig. 151).........	de BC (fig. 252).

RÉCIPROQUES

DE LA

GÉOMÉTRIE.

LIVRE PREMIER.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Toutes les fois que deux lignes droites se coupent, les angles opposés au sommet sont égaux.* (Géom. Liv. I, Proposit. V, Théor.)

Réciproque. *Si quatre droites OA, OC, OB, OD, qui aboutissent à un même point O, sont disposées de manière que les angles opposés au sommet* (*) *soient égaux, ces quatre lignes formeront deux droites.* Fig. 1.

(*) Par angles *opposés au sommet*, il faut entendre ici deux angles qui, ayant même sommet, n'ont pas de côté commun.

Soit l'angle $AOC = BOD$, et l'angle $AOD = BOC$: on aura

$$AOC + AOD = BOD + BOC;$$

mais la somme des quatre angles formés autour du point O, est égale à quatre angles droits ; donc $BOD + BOC$ vaut deux droits ; donc CD est une ligne droite. La somme........ $AOC + AOD$ ou son égale $BOD + AOD$ vaut aussi deux droits ; donc aussi BA est une ligne droite. Donc, etc.

Corollaire. Si la ligne AOB est droite, et si l'angle $AOC = BOD$, la ligne COD sera pareillement droite.

PROPOSITION II.

Théorème. *Si d'un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on mène des droites aux extrémités d'un même côté, la somme de ces droites sera moindre que celle des côtés enveloppans.* (Géom. Proposit. IX.)

Réciproque. *Si la somme des droites qui joignent un point pris dans le plan d'un triangle, avec les extrémités d'un côté, est moindre que celle des deux autres côtés ou des côtés en-*
Fig. 2. *veloppans, ce point est intérieur au triangle.*

Cette réciproque n'est pas vraie. En effet, soit O un point intérieur ; en menant BO et CO, on a $BO + CO < BA + AC$; faisons les angles $BCO' = OBC$, $O'BC = BCO$: les triangles BOC et BO'C seront égaux ; donc $BO' + CO' = BO + CO$, et par conséquent $BO' + O'C < BA + AC$. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Si deux triangles sont tels, que deux côtés du premier soient égaux à deux côtés du second, et qu'en même temps l'angle compris par les premiers, soit plus grand que l'angle compris par les seconds, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second.* (Géom. Prop. X.)

Réciproque. *Si deux triangles sont tels, que deux côtés du premier soient égaux à deux côtés du second, et qu'en même temps le troisième côté du premier soit plus grand que le troisième côté du second, l'angle opposé à ce côté dans le premier triangle, sera plus grand que l'angle opposé à ce même côté dans le second triangle.*

En effet, soient AB = DE, BC = EF, AC > DF, je dis que l'angle B est plus grand que l'angle E. Car, si l'angle B était égal à l'angle E, les triangles ABC, DEF seraient égaux, et par conséquent AC serait égal à DF, ce qui est contre l'hypothèse. Si l'angle B était plus petit que l'angle E, AC serait plus petit que DF, en vertu de la directe, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc l'angle B est plus grand que l'angle E. Donc, etc. Fig.

PROPOSITION IV.

Théorème. *La ligne menée du sommet d'un triangle isoscèle au milieu de sa base, est perpendiculaire à cette base, et divise l'angle du sommet en deux parties égales.* (Géom. Prop. XII, Schol.)

Réciproque. *Si une ligne est perpendiculaire sur l'un des côtés d'un triangle, et qu'elle divise l'angle opposé en deux parties égales, elle passera par le milieu de la base, et le triangle sera isoscèle.*

Soit AD cette perpendiculaire: d'après les conditions énoncées, BDA = ADC, BAD = DAC; donc les deux triangles BAD, DAC sont égaux, comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; donc DC = DB et BA = AC. Donc, etc. Fig. 4.

PROPOSITION V.

Théorème. *Si d'un point situé hors d'une droite, on mène une perpendiculaire sur cette droite et différentes obliques à différens*

points de cette même droite, la perpendiculaire sera plus courte que toute oblique. (Géom. Prop. XVI, Théor. 1°.)

Fig. 5. Réciproque. *La plus courte des lignes que l'on puisse mener à une droite, d'un point situé hors de cette droite, est la perpendiculaire à cette droite.*

Soit AB la plus courte des lignes que l'on puisse mener du point A à la droite DE. Si AB n'était pas une perpendiculaire à DE, on pourrait en abaisser une telle que AC. On aurait, en vertu de la directe, AC < AB, ce qui est contre l'hypothèse; donc AB est perpendiculaire à DE. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Théorème. *Deux obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire, sont égales.* (*Ibid.* Théor. 2°.)

Fig. 5. Réciproque. *Deux obliques égales s'écartent également de la perpendiculaire.*

Soient AC = AF et AB perpendiculaire à DE, je dis que CB = BF. La ligne par rapport à laquelle les écartemens BC, BF seront égaux, doit diviser également l'angle CAF. Si la perpendiculaire AB ne divise pas l'angle CAF en deux parties égales, soit AK la ligne qui opère cette division. Les angles AKC, AKF seraient égaux; donc la ligne AK serait perpendiculaire à DE. Donc ce ne peut être que par rapport à la perpendiculaire que les écartemens CB, CF seront égaux. Donc, etc.

Corollaire. De là il suit que deux triangles rectangles qui ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, sont égaux. Car on pourra toujours les concevoir disposés comme le sont les triangles ABC, ABF.

PROPOSITION VII.

Théorème. *De deux obliques qui s'écartent inégalement de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus sera la plus longue.* (*Ibid.* Théor. 3°.)

Réciproque. *De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus de la perpendiculaire.*

Soient AB perpendiculaire à DE, et AG > AF, je dis que l'on a BG > BF. Car si l'on pouvait avoir BG = BF, on aurait AG = AF, ce qui est contre l'hypothèse. Si l'on avait BG < BF, on conclurait AG < AF, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc BG > BF. Donc, etc. Fig. 5.

PROPOSITION VIII.

Théorème. *Une droite perpendiculaire sur le milieu d'une autre, a tous ses points à égales distances des deux extrémités de celle-ci.* (Géom. Proposit. XVII, 1°.)

Réciproque. *Si une droite a deux de ses points également distans des deux extrémités d'une autre droite, elle est perpendiculaire sur le milieu de celle-ci.*

Car cette droite a deux de ses points communs avec la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une ligne. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Théorème. *Tout point situé hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite, est inégalement distant des deux extrémités de cette droite.* (*Ibid.* 2°.)

Réciproque. *Si un point est inégalement distant des deux extrémités d'une droite, il est situé hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.*

Car, s'il était sur cette perpendiculaire, il serait également distant des deux extrémités de la droite. Donc, etc.

PROPOSITION X.

Théorème. *Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun.* (Géom. Prop. XVIII.)

Réciproque. *Si deux triangles sont égaux, comme ayant deux côtés égaux chacun à chacun, ils sont rectangles.*

Car s'ils ne l'étaient pas, il s'ensuivrait que deux triangles *obliquangles* ayant deux côtés égaux chacun à chacun, seraient égaux; et on sait que, pour ces triangles, on n'a pas ce caractère d'égalité. Donc, etc.

PROPOSITION XI.

Théorème. *Dans un triangle équilatéral, tous les angles sont égaux.* (Géom. Prop. XX, Cor. V.)

Réciproque. *Si dans un triangle les trois angles sont égaux, ce triangle est équilatéral.*

ig. 6. En effet, puisque C = A, on a AB = BC (Géom. Proposit. XIII.); de même, à cause de B = C, on a AC = AB; donc AB = BC = AC. Donc, etc.

PROPOSITION XII.

Théorème. *L'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux intérieurs opposés.* (Géom. Prop. XX, Cor. VI.)

g. 7. Réciproque. *Si un angle situé hors d'un triangle, a pour côté l'un de ceux du triangle, et s'il vaut la somme des deux angles intérieurs, l'un adjacent, l'autre opposé à ce côté, il aura pour second côté le prolongement du côté adjacent à l'un des angles et opposé à l'autre, c'est-à-dire qu'il sera extérieur au triangle.*

Car, la somme ACB + B + A étant égale à deux angles droits, il en est de même de la somme BCD + BCA; donc la ligne ACD est droite. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Théorème. *Deux parallèles sont partout également distantes.* (Géom. Prop. XXVII.)

Réciproque. *Si deux lignes sont partout également distantes, elles sont parallèles.*

Car, soient AB, CD deux lignes partout également distantes, c'est-à-dire, soit PQ=RS; PQ et RS étant deux Fig. 8.
perpendiculaires abaissées de deux points quelconques P et R de AB sur CD : menons la ligne QR; les triangles PQR, QRS sont égaux; donc l'angle PRQ=RQS; donc les droites AB, CD sont parallèles. Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Théorème. *Les côtés et les angles opposés d'un parallélogramme, sont égaux.* (Géom. Prop. XXIX, Théor.)

Réciproque. *Si, dans un quadrilatère, les côtés et les angles opposés sont égaux, cette figure est un parallélogramme.*

1° Les côtés opposés étant égaux, les deux triangles CDB, BDA sont égaux; donc les angles CBD et BDA sont égaux, et BC est parallèle à DA; on démontrerait de même que AB et DC sont parallèles.

2° Soit ABCD un quadrilatère dans lequel on ait l'angle A=C, et l'angle B=D; on aura conséquemment A+B=C+D. Fig. 9.
La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère étant égale à quatre droits, la somme A+B est égale à deux angles droits; donc les lignes BC, AD sont parallèles. On a aussi...... A+D=B+C; donc les lignes AB, DC sont parallèles; donc ABCD est un parallélogramme. Donc, etc.

PROPOSITION XV.

Théorème. *Dans tout parallélogramme, les deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales.* (Géom. Prop. XXXII, Théor.)

Réciproque. *Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent mutuellement en parties égales, cette figure est un parallélogramme.*

Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales AC, BD Fig. 9.
se coupent de manière qu'on ait AO=OC, BO=OD : les

triangles égaux AOD, BOC donnent AD = BC. Pareillement AB = CD ; donc la figure ABCD est un parallélogramme. Donc, etc.

PROPOSITION XVI.

Fig. 10. Théorème. *Dans tout losange, les diagonales se coupent mutuellement en parties égales et à angles droits.* (Géom. Prop. XXXII, Schol.)

Réciproque. *Si les deux diagonales AC, BD d'un quadrilatère ABCD se coupent mutuellement en parties égales et à angles droits, ce quadrilatère sera un losange.*

Par la première condition de l'énoncé, la figure ABCD est un parallélogramme : or, en vertu de la seconde, les triangles AOB, BOC sont égaux et donnent AB = BC ; donc AB = BC = CD = AD. Donc, etc.

Remarques.

Les Propositions I, VIII, XV, IX, XX, XXI, XXII, XXVIII n'admettent pas de réciproques. La réciproque du Coroll. IV, Prop. XX, est évidente.

LIVRE SECOND.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Tout diamètre divise le cercle et sa circonférence en deux parties égales.* (Géom. Liv. II, Prop. I.)

Réciproque. *Si une circonférence est divisée en deux parties égales, la droite qui opère cette division est un diamètre.*

Soit AMBN une circonférence divisée aux points A et B en deux parties égales : si le centre n'est pas sur la ligne AB, menons le diamètre AQ : en vertu de la directe, AMQ serait une demi-circonférence ; donc la partie AMQ serait égale au tout AMB, ce qui est absurde ; donc AB est un diamètre. Donc, etc. Fig. 11

PROPOSITION II.

Théorème. *Toute corde est plus petite que le diamètre.* (Géom. Prop. II.)

Réciproque. *Le diamètre est la plus grande de toutes les cordes.*

Car, soit AB la plus grande de toutes les cordes : si le centre O était hors de cette droite, par exemple, sur AQ, le diamètre AQ serait plus grand que la corde AB. Donc, etc. Fig. 11

PROPOSITION III.

Théorème. *Le rayon perpendiculaire à une corde, divise*

cette corde et l'arc soutendu, chacun en deux parties égales. (Géom. Prop. VI, Théor.)

Réciproque. *Si une ligne divise une corde et l'arc soutendu, chacun en deux parties égales, cette ligne est un rayon perpendiculaire à la corde.*

Car elle a deux de ses points communs au rayon perpendiculaire sur le milieu de la corde. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

Théorème. *Deux cordes égales sont également éloignées du centre.* (Géom. Prop. VIII, 1°.)

Réciproque. *Si deux cordes sont également éloignées du centre, elles sont égales.*

fig. 12. Soit la droite OP perpendiculaire à la corde AB, égale à OQ perpendiculaire à la corde CD : les triangles rectangles et égaux OPA, OQC donnent AP = CQ ; donc 2AP ou AB = 2CQ ou CD. Donc, etc.

PROPOSITION V.

Théorème. *De deux cordes inégales, la plus petite est la plus éloignée du centre.* (*Ibid.* 2°.)

Réciproque. *De deux cordes inégalement éloignées du centre, la plus éloignée est la plus petite.*

fig. 12. Car, si la corde AB, plus éloignée du centre que ne l'est CE, était égale à la corde CE, ces deux cordes seraient également éloignées du centre, ce qui est contre l'hypothèse: Si la première corde AB était plus grande que CE, la corde AB serait moins éloignée du centre que CE, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc on a AB < CE. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Théorème. *La perpendiculaire menée à l'extrémité du rayon, est tangente à la circonférence.* (Géom. Prop. IX, Théor.)

Réciproque. *Toute tangente à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené au point de contact.*

Soit A le point de contact d'une tangente BD; menons le rayon OA; je dis que BD sera perpendiculaire à OA. Car, dans le cas contraire, abaissons du centre O sur BD la perpendiculaire OC: cette ligne serait plus courte que le rayon OA; donc le point C serait intérieur au cercle, et BD serait une sécante, ce qui est contre l'hypothèse. Donc, etc. Fig. 13

Corollaire I. Donc la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente, aboutit au point de contact.

Corollaire II. La perpendiculaire à la tangente, élevée au point de contact, passe par le centre.

PROPOSITION VII.

Théorème. *Deux parallèles interceptent sur la circonférence des arcs égaux.* (Géom. Prop. X.)

Réciproque. *Si deux droites interceptent sur la circonférence des arcs égaux, elles sont parallèles.*

Car, 1°. si les lignes AB, CD sont des sécantes, menons le rayon OM perpendiculaire à AB: l'arc HM sera égal à l'arc MK. Par hypothèse, arc GH = arc KI; donc.... arc GM = arc MI; donc OM est, en même temps, perpendiculaire à CD. Donc les sécantes AB, CD sont parallèles. Donc, etc. Fig. 14 1°.

2°. Si AB est une tangente, et CD une sécante, on a, d'après l'énoncé, arc MG = arc MH; menons le rayon OM au point de contact M; la tangente AB et la sécante CD seront perpendiculaires à cette droite OM, et conséquemment parallèles. Donc, etc. 2°.

3°. Si AB et CD sont deux tangentes, on a, d'après l'énoncé arc MPN = arc MQN, donc MN est un diamètre; donc les tangentes AB, CD sont parallèles. Donc, etc. 3°.

PROPOSITION VIII.

Théorème. *Si deux circonférences se coupent en deux points, la droite qui passe par leurs centres sera perpendiculaire à la*

corde qui joint les points d'intersection, et la divisera en deux parties égales. (Géom. Prop. XI.)

Réciproque. *La perpendiculaire sur le milieu de la droite qui joint les points d'intersection de deux circonférences, passe par les centres.*

Car la droite qui joint les points d'intersection, est une corde commune aux deux cercles. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Théorème. *Tout angle se mesure par l'arc décrit de son sommet comme centre.* (Géom. Prop. XVII, Cor.)

Réciproque. *Si un angle a pour mesure l'arc compris entre ses côtés, son sommet est le centre de cet arc.*

Fig. 15. Cette réciproque n'est pas vraie. En effet, soit AOB un angle au centre ayant pour mesure l'arc ANB; par A, O et B faisons passer une circonférence AOBM; d'un point quelconque C, menons CA, CB; les angles AOB, ACB inscrits dans la circonférence AOBM et s'appuyant sur le même arc, auront tous deux pour mesure $\frac{AMB}{2}$; donc ACB=AOB; or AOB a pour mesure l'arc ANB; donc ACB aura la même mesure. Donc, etc.

PROPOSITION X.

Théorème. *L'angle inscrit a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.* (Géom. Prop. XVIII, Théor.)

Réciproque. *Si un angle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, il a son sommet à la circonférence, c'est-à-dire qu'il est inscrit.*

Lemme I. *Tout angle dont le sommet est entre le centre et la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'arc compris entre ces mêmes côtés prolongés.*

Fig. 16. En effet, prolongeons les côtés AB, CB de l'angle ABC jusqu'à ce qu'ils rencontrent la circonférence aux points D,

E; menons DF parallèle à BC. L'angle ADF sera égal à l'angle ABC : or, en vertu de la directe,

$$ADF = \tfrac{1}{2} ACF = \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} CF = \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} DE;$$

donc $ABC = \tfrac{1}{2} AC + \tfrac{1}{2} DE$. Donc, etc.

Lemme II. *Tout angle dont le sommet est hors du cercle, a pour mesure la différence des deux arcs compris entre ses côtés.*

Car, menons EG parallèle à BA : l'angle Fig. 17

$$CEG = \tfrac{1}{2} AC - \tfrac{1}{2} AG = \tfrac{1}{2} AC - \tfrac{1}{2} EF:$$

or $ABC = GEC$; donc $ABC = \tfrac{1}{2} AC - \tfrac{1}{2} EF$. Donc, etc.

Il résulte de ces deux propositions, que le sommet B de l'angle ABC ayant pour mesure la moitié de l'arc AC compris entre ses côtés, ne peut être que sur la circonférence dont l'arc AC fait partie. Donc, etc. Fig. 18

PROPOSITION XI.

Théorème. *Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit, valent ensemble deux angles droits.* (Géom. Prop. XVIII, Cor. IV.)

Réciproque. *Si les angles opposés d'un quadrilatère, valent en somme deux angles droits, ce quadrilatère est inscriptible.*

En effet, soit ABCD un quadrilatère dont les angles opposés B et D vaillent deux angles droits. Par les trois points A, B, C, faisons passer une circonférence : si le point D pouvait n'être pas situé sur cette circonférence, il tomberait au-dedans ou au-dehors. Mais, dans le premier cas, la somme des angles B et D vaudrait plus de deux angles droits, ce qui est contre l'hypothèse. Dans le second cas, cette somme serait moindre que deux angles droits, ce qui est encore contre l'hypothèse; donc le point D est sur la circonférence. Donc, etc. Fig. 19

Remarques.

I. La plus légère attention suffit pour faire apercevoir les réciproques des propositions VII et XII.

II. Le corollaire de la proposition XIV démontre les réciproques des théorèmes des propositions XIII et XIV.

III. Les propositions III et XIX n'admettent pas de réciproques.

LIVRE TROISIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Les parallélogrammes qui ont des bases égales et des hauteurs égales, sont équivalens.* (Géom. Liv. III, Prop. I, Théor.)

Réciproque. *Si deux parallélogrammes sont équivalens, ils auront des bases et des hauteurs égales.*

Cette réciproque n'a pas lieu. En effet, soit ABCD un parallélogramme; si on construit le parallélogramme AEFG de manière que sa base $AE = m.AB$, et qu'au contraire sa hauteur $kK = \frac{1}{m}KK'$, m étant un nombre quelconque ; je dis que ce parallélogramme est équivalent à ABCD; car AEHD, d'après la construction, renfermera m parallélogrammes égaux à ABCD; la même figure AEHD contiendra m parallélogrammes égaux à AEFG, puisque $AG = \frac{1}{m}$ AD, à cause de $Kk = \frac{1}{m}KK'$; donc AEFG = ABCD. Donc, etc Fig. 20.

Corollaire. Si on mène AF, le triangle AFE sera moitié de AEFG, et par conséquent moitié aussi du parallélogramme ABCD, ce qui prouve la fausseté de la réciproque de la Proposit. II, Théor. Fig. 20.

PROPOSITION II.

Théorème. *Deux rectangles de même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.* (Géom. Prop. III.)

Réciproque. *Si deux rectangles sont entre eux comme leurs bases, ils ont même hauteur.*

21. Soient ABCD, EFGH deux rectangles tels que l'on ait

$$ABCD : EFGH :: AB : EF;$$

je dis que la hauteur AD du premier est égale à la hauteur EH du second. Car si EH est plus grand que AD, prenons EK=AD, et menons KI parallèlement à EF. On aurait, en vertu de la directe,

$$ABCD : EFIK :: AB : EF;$$

de cette proportion et de la précédente, on déduirait

$$ABCD : ABCD :: EFGH : EFIK,$$

ce qui est absurde; donc EH ne peut être plus grand que AD. Un raisonnement absolument semblable démontrerait que EH ne peut être plus petit que AD; donc EH=AD. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Le quarré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.* (Géom. Prop. XI, Théor.)

Réciproque. *Si dans un triangle, le quarré fait sur un des côtés, est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, l'angle opposé à ce côté est droit.*

22. Soit ABC un triangle dans lequel on ait $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; je dis que l'angle ABC est droit. En effet, au point B menons BD perpendiculaire à BC et égal à AB; joignons CD.

Le triangle CBD étant rectangle en B, donne

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 :$$

or, par hypothèse, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; donc $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$, d'où AC = CD. Les triangles ABC, CBD égaux, comme ayant tous les côtés égaux chacun à chacun, donnent l'angle ABC = CBD ; donc l'angle ABC est droit. Donc, etc.

On peut encore parvenir à la même conclusion de la manière suivante : si AB n'est pas perpendiculaire à BC, menons la ligne BD qui soit telle. Ayant pris BD = AB, joignons CD ; on aura Fig. 23.

$$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

Or, par hypothèse, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; on conclurait donc, $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$, ou AC = DC, ce qui est absurde (Géom. Liv. I, Prop. X.) : donc l'angle ABC est droit.

PROPOSITION IV.

Théorème. *Le quarré fait sur la diagonale d'un quarré est double du quarré fait sur le côté.* (Géom. Prop. XI, Cor. II.)

Réciproque. *Si dans un quadrilatère, le quarré de la diagonale est double du quarré d'un des côtés, ce quadrilatère est un quarré.*

La réciproque énoncée de cette manière n'a pas lieu, puisqu'en faisant le triangle ABC rectangle isoscèle, on satisfait à la condition énoncée, et cependant les deux autres côtés AD et DC restent absolument arbitraires de grandeur et de position. Fig. 24

Le contraire a lieu, si on l'énonce ainsi :

Si dans un quadrilatère le quarré d'une diagonale est double

du quarré d'un côté quelconque, ce quadrilatère est un quarré.

Fig. 25. Car, si l'on a $\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2 = 2\overline{BC}^2$, $\overline{AC}^2 = 2\overline{CD}^2$, $\overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2$, on conclut $AB = BC = CD = DA$; donc ABCD est un rhombe : or on a $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; donc (Prop. III.) l'angle B est droit, et il en est de même de l'angle D : donc ABCD est un quarré. Donc etc.

PROPOSITION V.

Théorème. *Le quarré de l'hypoténuse est au quarré d'un des côtés de l'angle droit, comme l'hypoténuse est au segment adjacent à ce côté, et déterminé par une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit.* (Géom. Proposit. XI, Cor. III.)

Fig. 26. Réciproque. *Si dans un triangle ABC, le quarré du plus grand des côtés AC, est au quarré d'un autre côté AB, comme AC est au segment AB adjacent à AB et déterminé par la perpendiculaire BD, l'angle ABC est droit.*

Nous donnerons deux démonstrations de cette proposition inverse.

Soit donc $\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: AC : AD$: si l'angle ABC n'est pas droit, menons au point B la ligne BK qui fasse avec BA l'angle droit ABK. On aurait, en vertu de la directe,

$$\overline{AK}^2 : \overline{AB}^2 :: AK : AD,$$

d'où

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AK}^2} \times AK = \frac{\overline{AB}^2}{AK}.$$

Or, d'après l'énoncé réciproque,

$$AD = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \times AC = \frac{\overline{AB}^2}{AC};$$

en égalant les deux valeurs de AD, on aurait

$$\frac{\overline{AB}^2}{AK} = \frac{\overline{AB}^2}{AC}, \text{ ou } AK = AC,$$

ce qui est absurde : donc l'angle ABC est droit. Donc, etc.

Autrement, on a, d'après l'énoncé réciproque, les deux proportions

$$\overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: AC : AD$$
$$\overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 :: AC : DC,$$

qui deviennent

$$\overline{AC}^2 : AC :: \overline{AB}^2 : AD$$
$$\overline{AC}^2 : AC :: \overline{BC}^2 : DC;$$

d'où l'on déduit cette suite de rapports égaux

$$\overline{AC}^2 : AC :: \overline{AB}^2 : AD :: \overline{BC}^2 : DC$$

qui donne

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : AC + AD + DC :: \overline{AC}^2 : AC$$
$$\text{ou } :: AC : 1$$

Faisant le produit des extrêmes et celui des moyens, et les égalant, on trouvera

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + AD \times AC + DC \times AC;$$

effaçant de part et d'autre $\overline{AC}^2$, puis remplaçant AD par AC — DC, on obtiendra

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

D'où l'on conclut que le triangle qui jouit de la propriété énoncée, est rectangle.

PROPOSITION VI.

Théorème. *Les quarrés des deux côtés de l'angle droit sont entre eux, comme les segmens de l'hypoténuse, adjacens à ces côtés.* (Géom. Prop. XI, Cor. IV.)

Réciproque. *Si dans un triangle, les quarrés des deux côtés sont entre eux, comme les segmens du troisième côté, déterminés par une perpendiculaire à ce côté, abaissée du sommet opposé, ce triangle sera rectangle.*

Cette proposition inverse n'est pas vraie. En effet, soit ABC un triangle rectangle : on aura, d'après la directe,
Fig. 27. $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$; or prenons $DC' = DC$, AC' sera égale à AC. Donc on aura encore $\overline{AB}^2 : \overline{AC'}^2 :: BD : DC'$; mais le triangle BAC était rectangle, donc BAC' ne l'est pas. Donc, etc. La proposition directe est également vraie dans un triangle isoscèle non rectangle, comme on peut facilement s'en assurer.

PROPOSITION VII.

Théorème. *Dans un triangle ABC, si l'angle C est aigu, le quarré du côté opposé est plus petit que la somme des quarrés des côtés qui comprennent l'angle C, et, si l'on abaisse AD perpendiculaire sur BC, la différence sera égale au double du rectangle $BC \times CD$; de sorte qu'on a $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$.* (Géom. Prop. XII.)

Réciproque. *Si, dans un triangle ABC, en abaissant la*
Fig. 29. *perpendiculaire AD d'une extrémité du côté opposé, on a $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times CD$, l'angle C est aigu.*

Lemme. *Dans un triangle qui a un angle obtus, le quarré du côté opposé à cet angle, est plus grand que la somme des quarrés des deux autres côtés.*

En effet, soit ACB un triangle dans lequel l'angle BAC soit obtus; je dis que l'on aura

$$\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$ Fig. 28.

Car, au point A élevons AD perpendiculaire à AB, prenons AD = AC, et joignons BD : dans le triangle rectangle ABD, on a

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2.$$

Or de la considération des triangles BAC, BAD, il résulte BC > BD, ou $\overline{BC}^2 > \overline{BD}^2$; donc $\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^3$.

Occupons-nous maintenant de la démonstration de la réciproque énoncée ci-dessus. La considération de la grandeur déterminée du double rectangle 2BC × CD étant inutile, nous nous contenterons de regarder ce double rectangle comme une quantité soustractive quelconque. Cela posé, soit donc Fig. 29.

$$\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2:$$

si l'angle C pouvait être droit, on aurait $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$, ce qui est contre l'hypothèse : s'il pouvait être obtus, on aurait, d'après le lemme précédent,

$$\overline{AB}^2 > \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2:$$

donc l'angle est aigu. Donc, etc.

PROPOSITION VIII.

Théorème. *Dans un triangle quelconque ABC, si on mène du sommet au milieu de la base, la ligne AE, on aura* Fig. 30.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

(Géom. Prop. XIV, Théor.)

Réciproque. *Si on a* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$, *le point E est le milieu de la base du triangle BAC.*

Cette proposition inverse n'est pas vraie. En effet, menons AM perpendiculaire sur la base BC, et prenons C'M = CM, on aura AC' = AC, ou $\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2$; donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC'}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2.$$

Donc le triangle ABC' ainsi déterminé, jouit de la propriété énoncée, sans que sa base BC' soit divisée en deux parties égales au point E.

On voit qu'en prenant MA' = MA, on aura de même A'B = AB, et par conséquent la même propriété satisfait encore au triangle CA'B, sans que BD soit même dans l'intérieur du triangle.

PROPOSITION IX.

Théorème. *Dans tout parallélogramme, la somme des quarrés des côtés, est égale à la somme des quarrés des diagonales.* (Géom. *Ibid.* Cor.)

Fig. 31. Réciproque. *Si, dans un quadrilatère, la somme des quarrés des côtés est égale à la somme des quarrés des diagonales, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

Nous démontrerons, d'après *Euler*, que *la somme des quarrés des quatre côtés d'un quadrilatère, excède celle des quarrés des diagonales de quatre fois la ligne qui joint les milieux de ces diagonales;* d'où il s'ensuivra que la première propriété caractérise le parallélogramme, et ne caractérise que lui.

Soit ABCD un quadrilatère quelconque; soient M et N les milieux de ses diagonales. Menons les droites BM, DM; les triangles ABC, ACD donneront

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2.$$

et

$$\overline{DC}^2 + \overline{AD}^2 = 2\overline{AM}^2 + 2\overline{DM}^2.$$

Ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouvera

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = 4\overline{AM}^2 + 2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2$$
$$= \overline{AC}^2 + 2\overline{BM}^2 + 2\overline{DM}^2.$$

Joignons MN ; le triangle BMD donnant $\overline{BM}^2 + \overline{MD}^2 = 2\overline{BN}^2 + 2\overline{MN}^2$, il viendra

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + 2(2\overline{BN}^2 + 2\overline{MN}^2),$$

ou

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{MN}^2.$$

On voit par la dernière égalité, que *la somme des quarrés des quatre côtés d'un quadrilatère, excède celle des quarrés des diagonales, de quatre fois le quarré de la ligne qui joint les milieux de ces diagonales*, ce qui démontre la réciproque mentionnée.

Ce que nous venons de démontrer est encore vrai pour le cas où l'une des diagonales couperait l'autre en son milieu.

PROPOSITION X.

Théorème. *La ligne qui divise un des angles d'un triangle en deux parties égales, divise le côté opposé en deux segmens proportionnels aux côtés adjacens.* (Géom. Prop. XVII.)

Réciproque. *Si un côté BC d'un triangle quelconque BAC, est divisé au point E en deux parties BE, EC proportionnelles aux côtés adjacens AB, AC, de sorte que l'on ait BE : EC :: AB : AC; je dis que la ligne BE divise l'angle BAC en deux parties égales.* Fig. 31 et 32.

En effet, si la ligne AE ne divise pas l'angle BAC en deux Fig. 30. parties égales, soit AK la ligne qui opère cette division : on aurait, en vertu de la directe, BK : KC :: AB : AC : or, par hypothèse, BE : EC :: AB : AC ; donc il viendrait BE : BK :: EC : KC, proportion impossible, parce que le premier antécédent étant plus grand que son conséquent, le second antécédent est, au contraire, plus petit que son conséquent. Donc la ligne AC divise l'angle BAC en deux parties égales. Donc, etc.

On peut parvenir d'une manière directe à la démonstration Fig. 32. de la même réciproque. Soit BE : EC :: AB : AC ; prolongeons BA, et prenons AD = AC ; joignons CD : cette droite sera parallèle à AE, puisque l'on a

BE : EC :: BA : AD.

De là il suit que l'angle BAE = ADC = ACD = EAC ; donc BAE = EAC. Donc, etc.

PROPOSITION XI.

Théorème. *Les lignes menées comme on voudra par le sommet d'un triangle, divisent la base de ce triangle et toute ligne qui lui est parallèle, en parties proportionnelles.* (Géom. Prop. XXII, Théor.)

Réciproque. *Si, du sommet B d'un triangle quelconque AB,* Fig. 33. *on mène à la base AC plusieurs droites BK, BL, BM qui coupent cette ligne et une autre droite DE, en parties proportionnelles, de manière que l'on ait AK:DI::KL:IG::etc., je dis que DE est parallèle à AC.*

Car si la droite DE n'est pas parallèle à AC, menons DR parallèle à AC ; on aurait, en vertu de la directe ; AK:DO::KL : OP :: etc. De cette proportion et de l'hypothèse, on déduirait

DI : DO :: IG : OP :: etc. ;

d'où l'on conclurait (Géom. Liv. III. Prop. XVI) que la droite BK est parallèle à BL, ce qui est absurde ; donc la droite DE est parallèle à AC. Donc, etc.

PROPOSITION XII.

Théorème. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, les deux triangles partiels sont semblables entre eux et au triangle total.* (Géom. Prop. XXIII. Théor. 1°.)

Réciproque. *Si la perpendiculaire abaissée du sommet d'un triangle sur la base, divise cè triangle en deux triangles partiels semblables entre eux et au triangle total, le triangle total est rectangle.*

En effet, 1°. si les triangles ABD, DBC sont semblables, Fig. 2
et que l'angle A soit égal à l'angle DBC, l'angle C sera égal à l'angle DBA; donc la somme des angles A, C, sera égale à ABC; donc A+C+ABC=2ABC, et conséquemment l'angle ABC est droit.

2°. Si l'on supposait l'angle A = C, le triangle ABC serait isoscèle; les triangles partiels ABD, DBC qui lui sont semblables, seraient aussi isoscèles : la conclusion serait donc la même.

Il est visible qu'on ne peut faire l'hypothèse A = BDC, puisqu'alors AB serait parallèle à BD.

PROPOSITION XIII.

Théorème. *Si du sommet d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, chaque côté de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse et le segment adjacent.* (Géom. *Ibid.* 2°.)

Réciproque. *Si du sommet B d'un triangle, on abaisse une perpendiculaire sur la base, et que chacun des côtés adjacens au sommet B, soit moyen proportionnel entre la base et le segment contigu au côté, le triangle sera rectangle en B.*

De la proportion AD : AB :: AB : AC, on conclut que les triangles ABC, ABD qui ont l'angle A commun, sont sem- Fig. 2

blables ; donc, en vertu de la réciproque précédente, l'angle ABC est droit.

La même conclusion se déduirait de la proportion

$$CD : CB :: CB : CA.$$

Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Théorème. *Si du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse ; cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypoténuse.* (Géom. Prop. XXIII, Théor. 3°.)

6. Réciproque. *Si la perpendiculaire BD abaissée du sommet d'un triangle ABC sur la base AC, est moyenne proportionnelle entre les deux segmens AD et CD de la base, le triangle ABC est rectangle en B.*

On a en même temps

$$\overline{BD}^2 = AD.DC,\ \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2,\ \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2:$$

donc

$$AD.DC = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2,\quad AD.DC = \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2,$$

d'où résultent ces égalités

$$AD.AC = \overline{AB}^2,\quad DC.AC = \overline{BC}^2,$$

dont l'addition donne

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2:$$

donc le triangle ABC est rectangle en B. Donc etc.

PROPOSITION XV.

Théorème. *Deux triangles qui ont un angle égal sont entre*

eux comme les rectangles des côtés qui comprennent l'angle égal. (Géom. Prop. XXIV. Théor.)

Réciproque. *Si deux triangles sont entre eux comme les rectangles de deux de leurs côtés, les angles compris par les côtés sont égaux.*

Cette proposition n'est pas vraie : car soient ABC, DBE deux triangles tels que l'on ait Fig. 34

$$ABC : DBE :: BA \times BC : BD \times BE.$$

Prolongeons AB, et prenons BK = BD : le rectangle BE × BK sera égal au rectangle BD × BE, et l'on aura

$$ABC : EBK :: BA \times BC : BE \times BK.$$

Donc la réciproque n'a pas lieu en général ; mais remarquons que si l'angle ABC était droit, l'angle EBK lui serait égal, et alors la réciproque serait vraie.

PROPOSITION XVI.

Théorème. *Deux triangles semblables sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.* (Géom. Prop. XXV.)

Réciproque. *Si deux triangles sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés respectifs, ils sont semblables.*

Soient ABC, DEF, deux triangles tels qu'on ait Fig. 35.

$$ABC : DEF :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2$$

$$ABC : DEF :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2$$

$$ABC : DEF :: \overline{BC}^2 : \overline{EF}^2.$$

De ces proportions on déduit

$$\overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{DF}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{EF}^2,$$

d'où

$$AB : DE :: AC : DF :: BC : EF.$$

Donc les triangles ABC, DEF sont semblables. Donc, etc.

PROPOSITION XVII.

Théorème. *Les contours des polygones semblables sont entre eux comme les côtés homologues.* (Géom. Prop. XXVII. Théor.)

Réciproque. *Si les contours de deux polygones sont comme leurs côtés homologues, ces polygones sont semblables.*

Cette réciproque n'a pas lieu. Pour le démontrer, soient Fig. 36. P et Q deux polygones dont les contours soient entre eux comme les côtés, c'est-à-dire, tels que l'on ait

$$ABCDE : abcde :: AB : ab$$
$$ABCDE : abcde :: BC : bc$$
$$ABCDE : abcde :: CD : cd,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces données se réduisent évidemment à celles-ci :

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd, \text{ etc.} :$$

or divisons les côtés du polygone ABCDE en deux parties égales, et soit, par exemple, F le milieu de BC. Faisons l'angle FCI non égal à BCD ; prenons $CI = \frac{1}{2} DC$, et par le point F menons une droite de direction telle qu'en prenant $FG = \frac{1}{2} AB$, on ait $GI < \frac{1}{2} AE + \frac{1}{2} DE$. Cette condition étant remplie, des points G et I comme centres avec des rayons égaux à $\frac{1}{2} AE$ et $\frac{1}{2} DE$, on décrira deux arcs qui se couperont en H : le polygone CFGHI aura ses côtés proportionnels à ceux du premier polygone, et ne lui sera pas semblable ; puisqu'il y a, d'après sa construction, deux angles inégaux compris entre des côtés proportionnels. Donc, etc.

PROPOSITION XVIII.

Théorème. *Les surfaces des polygones semblables sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues.* (Géom. Prop. XXVII. Théor. 2°.)

Réciproque. *Si la surface de deux polygones sont entre elles comme les quarrés des côtés homologues, ces polygones sont semblables.*

Cette proposition inverse n'est pas vraie. En effet, soient P et Q ces deux polygones, on aura Fig. 36

$$P : Q :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2,$$
$$P : Q :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2,$$
$$P : Q :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2,$$
etc.

On déduit de là

$$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 :: \text{etc.};$$

c'est-à-dire,

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: \text{etc.};$$

ce qui ne suffit pas, ainsi qu'on l'a démontré dans la proposition précédente, pour établir la similitude entre les polygones. Donc, etc.

PROPOSITION XIX.

Théorème. *Si sur les trois côtés d'un triangle rectangle, comme côtés homologues, on construit trois figures semblables, celle formée sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des deux autres.* (Géomét. Prop. XXVII. Cor.)

Réciproque. *Si sur les trois côtés d'un triangle ABC, on construit trois figures semblables, et si la figure formée sur le plus grand côté, est équivalente à la somme des deux autres, l'angle du triangle, opposé à ce côté, est droit.* Fig. 37

En effet, soient P, Q, R les trois figures semblables dont il s'agit. Si l'on a $P = Q + R$, je dis que l'angle ABC est droit. Car, en vertu de l'énoncé, on a

$$P : \overline{AC}^2 :: Q : \overline{BC}^2 :: R : \overline{AB}^2,$$

d'où

$$P : Q + R :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 :$$

donc $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$; et conséquemment (Prop. III.) l'angle ABC est droit. Donc, etc.

PROPOSITION XX.

Théorème. *Les parties des deux cordes qui se coupent dans le cercle, sont réciproquement proportionnelles.* (Géomét. Prop. XXVIII, Théor.)

Réciproque. *Si deux droites se coupent en parties réciproquement proportionnelles, leurs extrémités sont sur une même circonférence.*

Fig. 38. Car soient AB, CD deux droites qui se coupent de manière qu'on ait

$$AI : IC :: ID : IB.$$

Si la circonférence qui passe par les trois points A, C, B ne passait pas par le point D, elle couperait la ligne CD, ou son prolongement en un point K tel que l'on aurait

[illegible] : IC :: IK : IB.

De cette proportion et de l'hypothèse, on déduirait $IK = ID$: ce qui est absurde. Donc, etc.

PROPOSITION XXI.

Théorème. *Si, d'un même point pris hors d'un cercle, on mène deux sécantes terminées à l'arc concave, les sécantes*

entières sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures. (Géom. Prop. XXIX, Théor.)

Réciproque. *Si deux droites partant d'un même point, sont divisées en parties qui leur soient réciproquement proportionnelles, les points de division et les extrémités de ces droites sont sur une même circonférence.*

Le raisonnement qui démontre la réciproque précédente, s'applique exactement à celle-ci. Car, si l'on a Fig. 39.

$$AB : AC :: AE : AD,$$

on ne peut supposer que la circonférence qui passe par les trois points D, B, C, ne passe pas par le point E.

PROPOSITION XXII.

Théorème. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on mène une tangente et une sécante à ce cercle, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure.* (Géom. Prop. XXX.)

Réciproque. *Si de deux droites AB, AC qui partent d'un même point A, l'une AB est divisée au point D de manière que l'on ait* $\overline{AC}^2 = AB \times AD$, *je dis que la ligne AC est tangente en C à la circonférence qui passe par les trois points B, D, C.* Fig. 40.

Car si cette circonférence pouvait rencontrer la droite AC ou son prolongement, en un second point K, on aurait

$$AB \times AD = AC \times AK :$$

or

$$AB \times AD = \overline{AC}^2 = AC \times AC;$$

d'où l'on déduirait AC = AK : ce qui est absurde. Donc, etc.

Pour démontrer la même réciproque d'une manière directe, menons le rayon OC : tout se réduit à démontrer que l'angle OCA est droit. A cet effet, par le centre O, menons la sé-

çante AE : les sécantes AB, AE donnent

$$AB \times AD = AE \times AI :$$

or, par hypothèse,

$$AB \times AD = \overline{AC}^2 ;$$

donc

$$AE \times AI = \overline{AC}^2 ,$$

ou, puisque

$$AE = AO + OC ; \quad AI = AO - OC ,$$

on a

$$(AO + OC)(AO - OC) = \overline{AC}^2 ,$$

ou encore

$$\overline{AO}^2 - \overline{OC}^2 = \overline{AC}^2 ,$$

d'où l'on tire

$$\overline{AO}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{OC}^2 ;$$

donc (Prop. III.) l'angle ACO est droit, et AC est une tangente à la circonférence qui passe par les trois points B, D, C. Donc, etc.

PROPOSITION XXIII.

Fig. 41. Théorème. *Dans un triangle ABC, si l'on divise l'angle A en deux parties égales par la ligne AD, le rectangle des côtés AB, AC, est égal au rectangle des seg[illegible] BD, DC, plus au quarré de la sécante AD* (Géom. Prop. [illegible]XI.)

Réciproque. *Si dans un triangle ABC, l'on a*

$$AB \times AC = BD \times DC + \overline{AD}^2 ,$$

la ligne AD divisera l'angle BAC en deux parties égales.

Soit donc ABC un triangle dans lequel on ait

$$AB \times AC = BD \times DC + \overline{AD}^2 .$$

Si la ligne AD ne divise pas l'angle A en deux parties égales, soit AK la ligne qui opère cette division. En vertu de la directe, on aura

$$AB \times AC = BK \times KC + \overline{AK}^2;$$

donc on aurait

$$BD \times DC + \overline{AD}^2 = BK \times KC + \overline{AK}^2.$$

Au triangle ABC circonscrivons un cercle qui rencontre en E et en F, les droites AD, AK prolongées. Puisque

$$BD \times DC = AD \times DE$$

et

$$BK \times KC = AK \times KF,$$

on aurait, par la substitution de ces valeurs dans l'égalité précédente,

$$AD\,(ED + DA) = AK\,(KF + AK),$$

c'est-à-dire

$$AD \times AE = AK \times AF;$$

donc le quadrilatère EDKF serait inscriptible (Prop. XXI); donc la somme des angles opposés FKD, FED serait égale à deux angles droits; donc l'angle AKC serait égal à l'angle FED ou FEA; donc (Liv. II, Prop. X, Lem. I.) l'arc AMC serait égal à l'arc ANB, ce qui n'a lieu que lorsque le triangle ABC est isoscèle. Donc l'angle BAC est divisé en deux parties égales par la droite AD. Donc, etc.

Remarques.

I. On reconnaîtra, avec une légère attention, que les propositions IV, VII (Théor.), VIII (Théor.), IX (Théor.) X (Théor.), XXI (Théor.), n'admettent pas de réciproques.

II. Les énoncés compris dans le corollaire de la proposition V, donnent lieu aux réciproques suivantes : 1°. *Si deux parallélogrammes sont entre eux comme leurs hauteurs, ils ont même base ; 2°. si deux parallélogrammes sont entre eux comme leurs bases, ils ont même hauteur.* On s'assurera de la vérité de ces deux propositions, par des raisonnemens analogues à celui que nous avons employé. (Prop. II.)

III. La remarque précédente peut être faite relativement aux énoncés compris dans le corollaire de la proposition VI.

IV. Nous nous sommes dispensés de rapporter la réciproque de la proposition XIII, parce que la démonstration est la même que celle donnée (Prop. VII.)

V. Le théorème de la proposition XXXII n'admet pas de réciproque ; car, si elle avait lieu, son énoncé serait celui-ci : *si le rectangle de deux côtés d'un triangle est égal au rectangle de deux autres lignes, l'une de ces lignes est la hauteur du triangle, et l'autre le diamètre du cercle circonscrit.*

Mais si le rectangle de deux côtés d'un triangle est égal au rectangle de deux autres lignes dont l'une soit la hauteur du triangle, l'autre sera nécessairement le diamètre du cercle circonscrit. Cette observation fournit un moyen simple de
42. déterminer le diamètre CE du cercle circonscrit à un triangle ABC, lorsque l'on connaît deux côtés contigus AB, AC et la hauteur AD de ce triangle : on n'a besoin pour cela que de construire la ligne représentée par $\frac{AB \times AC}{AD}$.

Pareillement, si l'on connaît AB, AC, CE, on trouvera $AD = \frac{AB \times AC}{CE}$.

VI. Le corollaire de la même proposition n'admet pas de réciproque, non plus que le scholie.

VII. Nous avons démontré, mais seulement dans des cas particuliers, que la réciproque de la proposition XXXIII n'avait pas lieu.

LIVRE QUATRIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Tout polynome régulier peut être inscrit dans le cercle, et lui est circonscrit.* (Géomét. Prop. II, Liv. IV.) Fig. 43.

Réciproque. *Si un polygone est en même temps inscriptible et circonscriptible, il est régulier.*

Cette proposition inverse n'est pas généralement vraie, puisque le triangle scalène jouit de la propriété énoncée (Géom. Prop. VII, Liv. II). Mais la réciproque a lieu lorsque les circonférences sont concentriques.

En effet, puisque le polygone ABCDEG est inscrit au cercle OA, on aura OA = OB = OC = etc. D'après la seconde condition OM = ON = etc. Donc les cordes AB, BC, etc. également distantes du centre, sont égales; donc les triangles OAB et OBC sont égaux et isoscèles; par conséquent

$$\text{angl. OAB} = \text{angle OBC}\,;\quad \text{angl. OAG} = \text{angl. OBA},$$

d'où

$$\text{OAB} + \text{OAG} = \text{OBC} + \text{OBA},\quad \text{ou GAB} = \text{ABC},$$

et ainsi de suite. Ce polygone ayant les angles et les côtés égaux, est régulier. Donc, etc.

PROPOSITION II.

Théorème. *Le côté du quarré inscrit est au rayon comme $\sqrt{2}$ est à 1.* (Géom. Liv. IV, Prop. III, Schol.)

Réciproque. *Si une corde est au rayon, comme $\sqrt{2}$ est à 1, cette corde est le côté du quarré inscrit.*

Car soit Q cette corde et R le rayon; on aura

$$Q : R :: \sqrt{2} : 1.$$

Si Q n'était pas le côté du quarré inscrit, en représentant ce côté par Q', on aurait, d'après la directe, $Q' : R :: \sqrt{2} : 1$; d'où $Q = Q'$, ce qui est absurde. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Le côté du triangle équilatéral inscrit est au rayon, comme $\sqrt{3}$ est à 1.* (Géom. Prop. IV, Schol.)

Réciproque. *Si une corde est au rayon comme $\sqrt{3}$* est à 1, *cette corde est le côté du triangle équilatéral inscrit.*

La démonstration de cette réciproque est la même que celle de la précédente.

PROPOSITION IV.

Fig. 44. Problème. *Inscrire dans un cercle un décagone régulier.*

Soit AB le côté de ce polygone; l'angle au centre C vaudra $\frac{1}{10}$ de 4 droits, ou les $\frac{2}{5}$ d'un angle droit que nous prendrons pour l'unité des angles: A + B sera par conséquent égal à $\frac{8}{5}$; et comme le triangle ACB est isoscèle, $A = \frac{4}{5}$, $B = \frac{4}{5}$. En divisant B en deux parties égales par la ligne BM, on formera les triangles isoscèles CBM et ABM; le triangle CBA donnera (Géom. Prop. XVII, Liv. III.) BC : CM :: AB : AM. Or $BC = AC$, $CM = BM = AB$; on aura donc AC : CM :: CM : AM, d'où CM > AM; ainsi le côté AB = CM du déca-

gone est égal au plus grand segment du rayon divisé en moyenne et extrême raison. Cette solution est directe et facile à retenir.

PROPOSITION V.

Théorème. *L'aire d'un polygone régulier est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.* (Géom. Prop. VII, Théor.)

Réciproque. *Si la surface d'un polygone circonscriptible à un cercle, est égale au contour de ce polygone, multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit, ce polygone est régulier.*

Cette inverse n'est pas vraie, puisqu'en menant à une circonférence une suite de tangentes quelconques qui forment un polygone qui ne soit pas régulier, sa surface sera égale au contour par la moitié du rayon du cercle inscrit.

PROPOSITION VI.

Théorème. *Les périmètres des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont comme les rayons des cercles inscrit et circonscrit, et leurs surfaces comme les quarrés de ces rayons.* (Géom. Prop. VIII, Théor.)

Réciproque. *Si les contours de deux polygones sont entre eux comme $R : R'$ et comme $r : r'$; et leurs surfaces comme $R^2 : R'^2$, et comme $r^2 : r'^2$, R et r, R' et r' étant les rayons de circonférences concentriques, ces polygones sont inscriptibles et circonscriptibles aux circonférences décrites avec les rayons R et r, R' et r'.*

Cette réciproque n'a pas lieu. En effet, on a par l'énoncé

$$P : P' :: R : R' :: r : r',$$

P, P' étant les contours ; donc, en supposant que les deux polygones aient même nombre de côtés égaux chacun à chacun, ce qui est l'une des conditions nécessaires pour leur simili-

tude, et désignant ce nombre de côtés par m, on aura

$$\frac{1}{m}\text{P} : \frac{1}{m}\text{P}' :: \text{R} : \text{R}' :: r : r' ;$$

d'où

$$\left(\frac{1}{m}\text{P}\right)^2 : \left(\frac{1}{m}\text{P}'\right)^2 :: \text{R}^2 : \text{R}'^2 : r^2 : r'^2 ;$$

propriétés qui ne permettent pas de conclure que les deux polygones soient semblables, et conséquemment qu'ils soient réguliers, inscriptibles ou circonscriptibles. (Récip. Liv. III, Proposit. XVII, XVIII.)

PROPOSITION VII.

Problème. *Étant données les surfaces A et B d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces A′ et B′ des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés double.* (Géom. Prop. XIII.)

Réciproque. *Étant données les surfaces A′ et B′ d'un polygone régulier inscrit d'un nombre de côtés pair et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces A et B des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre de côtés sous-double.*

Si l'on connaissait A et B, et qu'on se proposât de déterminer A′ et B′, on aurait, en vertu du problème direct, $\text{A}' = \sqrt{\text{A} \times \text{B}}$ et $\text{B}' = \frac{2\text{A} \times \text{B}}{\text{A} + \text{A}'}$. Dans le problème inverse, on se donne A′ et B′, et il s'agit de calculer A et B. Or, de la première équation l'on tire $\text{A} = \frac{\text{A}'^2}{\text{B}}$; la seconde donne $\text{A} = \frac{(\text{A} + \text{A}') \times \text{B}'}{2\text{B}}$. Donc $\frac{\text{A}'^2}{\text{B}} = \frac{(\text{A} + \text{A}') \times \text{B}'}{2\text{B}}$, d'où l'on déduit $2\text{A}'^2 = \text{AB}' + \text{A}'\text{B}'$; donc $\text{A} = \frac{\text{A}'(2\text{A}' - \text{B}')}{\text{B}'}$. Égalant les deux valeurs trouvées pour A, on aura une équation

de laquelle on déduira $B = \frac{A' \times B'}{2A' - B'}$, et conséquemment

$$A = \frac{A'^2(2A' - B')}{A'B'} = \frac{A'(2A' - B')}{B'}.$$

PROPOSITION VIII.

Problème. *Étant données les surfaces d'un polygone régulier inscrit et d'un polygone semblable circonscrit, trouver les surfaces des polygones réguliers inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.*

Nous désignerons, comme l'a fait M. *Legendre*, par A et B, la surface du polygone inscrit dont AB est un côté et Fig. 45. celle du polygone semblable circonscrit; par A' la surface du polygone inscrit dont AM est un côté, et par B' celle du polygone semblable circonscrit, ou parce que les triangles CAD, CAM, CEM et CAPM sont entre eux comme les polygones dont ils font partie, nous ferons CAD $=$ A, CAM $=$ A', CEM $=$ B, CAPM $=$ B'. On aura

$$ACD = A,$$
$$ACM = A' = A + \frac{AD \times MD}{2},$$
$$ECM = B = A + ADMA' + AA'E,$$

en menant AA' parallèle à CM. Or $ADMA' = AD \times DM$; $AA'E = \frac{AA' \times EA'}{2} = \frac{MD \times EA'}{2}$; mais la similitude des triangles EAA', ACD donne

$EA' : AA'$ ou $MD :: AD : DC$, d'où $EA' = \frac{MD \times AD}{DC}$, et conséquemment

$$ECM = B = A + AD \times DM + \frac{\overline{MD}^2 \times AD}{2DC}$$
$$= A + AD \times DM + \frac{\overline{MD}^2 \times \overline{AD}^2}{2DC \times AD}$$
$$= A + AD \times DM + \frac{\overline{MD}^2 \times \overline{AD}^2}{4A}.$$

Enfin

$$\begin{aligned}ACMP = B' &= A + ADMA' - AA'P \\ &= A + AD \times DM - \frac{AA' \times A'P}{2} \\ &= A + AD \times DM - \frac{MD \times A'P}{2}.\end{aligned}$$

Or les triangles semblables AA'P, ADC, parce qu'ils ont tous les côtés perpendiculaires l'un à l'autre, donnent

$$A'P : AA' \text{ ou } MD :: CD : AD, \text{ d'où } A'P = \frac{MD \times CD}{AD};$$

donc

$$ACMP = B' = A + AD \times DM - \frac{\overline{MD}^2 . CD}{2AD}.$$

Ainsi on a cette suite de valeurs :

$$1^{\circ}\ldots\ldots\ A = A;$$

$$2^{\circ}\ldots\ldots\ A' = A + \frac{AD \times MD}{2};$$

$$3^{\circ}\ldots\ldots\ B = A + AD \times MD + \frac{\overline{MD}^2 \times \overline{AD}^2}{4A};$$

$$4^{\circ}\ldots\ldots\ B' = A + AD \times MD - \frac{\overline{MD}^2 \times CD}{2AD}.$$

Il est visible que $B \times A = A'^2$, d'où $A' = \sqrt{B \times A}$; c'est ce qu'on peut trouver plus directement, en représentant par R la surface du triangle AMD; car on a

$$(a)\ldots\ldots\ A = A,$$

$$(b)\ldots\ldots\ A' = A + R,$$

$$(c)\ldots\ldots\ B = A + 2R + \frac{R^2}{A}.$$

De la seconde égalité on tire

$$A' - A = R,$$

et substituant cette valeur de R dans la troisième, elle devient, après les réductions,

$$B = \frac{A'^2}{A}; \text{ d'où } A' = \sqrt{AB},$$

comme ci-dessus.

Reprenons la formule (4°) qui revient à celle-ci

$$B' = A + AD \times MD - \frac{MD.AD.MD.CD}{2\overline{AD}^2},$$

et introduisons dans la valeur de B' la surface R : par cette substitution,

$$B' = A + 2R - R.\frac{MD.CD}{\overline{AD}^2}.$$

Or de la relation

$$\overline{AD}^2 = MD\ (CM + CD) = MD\ .\ CM + MD\ .\ CD,$$

on déduit

$$\frac{\overline{AD}^2}{MD\ .\ CD} = \frac{CM}{CD} + 1 = \frac{A'}{A} + 1 = \frac{A' + 1}{A};$$

donc

$$\begin{aligned} B' &= A + 2R - \frac{RA}{A' + A} \\ &= A + \frac{R\ (A + 2A')}{A + A'} \\ &= A + \frac{(A' - A)\ (A + 2A')}{A + A'}, \end{aligned}$$

et après avoir réduit A au dénominateur A + A' et effectué les réductions, on trouve

$$B' = \frac{2A'^2}{A + A'} = \frac{2AB}{A + A'}.$$

Dans les Notes annexées à cet ouvrage, nous ferons connaître une démonstration très-simple de cette proposition, que nous ne pouvons placer ici, parce qu'elle est fondée sur la Trigonométrie.

Remarques.

Les propositions I (Théor.), III (Théor.), IX, X (Théor.), XI, XII (Théor.), ne donnent pas lieu à réciproques.

LIVRE CINQUIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Les obliques également éloignées de la perpendiculaire sont égales, et, de deux obliques inégalement éloignées de la perpendiculaire, celle qui s'en éloigne le plus est la plus longue.* (Géom. Liv. V, Prop. V, Théor.)

Réciproque. *Les obliques égales sont également éloignées de la perpendiculaire, et, de deux obliques inégales, la plus longue est la plus éloignée de la perpendiculaire.*

On démontrera facilement les deux propositions comprises dans cet énoncé, par des considérations analogues à celles que nous avons employées. (Liv. I, Prop. V et VI.)

Scholie. *L'inclinaison de la ligne AB sur le plan MN, se mesure par l'angle ABP formé par la ligne AB avec l'intersection BP du plan MN par le plan conduit suivant AB, et la perpendiculaire AP au plan MN.* Fig. 46

Cet angle ABP est très-propre à mesurer cette inclinaison ; car lorsque AB se rapproche de AP et devient AB′, l'angle PAB diminue, son complément PBA augmente. Lorsqu'au contraire AB s'éloigne de AP, l'angle ABP diminue.

D'ailleurs cette mesure constante pour des écartemens PB égaux, est en même temps le *minimum* de tous les angles que forme AB avec les droites qui passent par son pied dans le plan MN. En effet, si ABP n'était pas le *minimum* de

tous ces angles, soit ABD l'angle le plus petit; prenons BD $=$ BP, et menons AD; les deux triangles ABP et ABD auront le côté AB commun, et BP$=$BD, par contruction; mais l'angle ABD étant, par hypothèse, plus petit que ABP, AD serait $<$ AP: or AP étant une perpendiculaire et AD une oblique, AD est $>$ AP; donc la conclusion précédente est absurde, et par conséquent l'angle ABP est plus petit que tout angle ABD.

ABP étant l'angle *minimum*, son supplément ABC sera l'angle *maximum*.

PROPOSITION II.

47. Théorème. *Soit AP une perpendiculaire au plan MN, et BC une ligne située dans ce plan; si du pied P de la perpendiculaire, on abaisse PD perpendiculaire sur BC, et qu'on joigne AD, AD est perpendiculaire à BC.* (Géom. Prop. VI, Théor.)

Réciproque. *Soit AD une perpendiculaire abaissée du point A situé hors du plan MN, sur la droite BC située dans ce plan; si, par le point D, on mène dans le plan la perpendiculaire DP à BC, et que du point A, on abaisse une perpendiculaire AP à PD; je dis que AP sera perpendiculaire au plan MN.*

Car, si AP perpendiculaire à PD ne l'est pas au plan MN, menons AQ perpendiculaire à ce plan: le point Q ne pourra pas être un des points de PD, puisqu'alors AQ et AP seraient deux perpendiculaires à la droite PD, menées d'un même point A hors de cette droite; donc la perpendiculaire QF à BC sera différente de PD; donc la ligne AF sera différente de AD. Or, en vertu de la directe, AF doit être perpendiculaire à BC; donc il y aurait deux perpendiculaires AD, AF menées d'un même point à une même droite BC et dans le même plan ABC, ce qui est absurde; donc AP est perpendiculaire au plan MN. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Deux plans parallèles sont partout à égale distance*. (Géom. Prop. XII, Cor.)

Réciproque. *Si deux plans sont partout à égales distances, ils sont parallèles.*

Soient MN, PQ deux plans partout à égales distances; ensorte que les perpendiculaires AB, CD abaissées de deux points quelconques A et C du plan PQ sur le plan MN, soient égales: ces perpendiculaires seront parallèles; donc les triangles BCD, BAC seront égaux, et conséquemment AC sera toujours parallèle à BD. Donc, etc. Fig. 4

PROPOSITION IV.

Dans la rencontre des plans parallèles, par un troisième, il existe, dit l'Auteur, *les mêmes égalités d'angles et les mêmes propriétés que dans la rencontre de deux lignes parallèles par une troisième* (Géom. Prop. XV, Scholie.)*;* ce qui est incontestable, s'il s'agit des propriétés directes seulement; mais on se convaincra que les propriétés réciproques qui sont démontrées par rapport aux lignes, ne conviennent pas aux plans. *Ainsi*, par exemple, *si deux plans coupés par un troisième, ont les angles correspondans égaux, ces plans peuvent n'être pas parallèles*. En effet, supposons un plan, horizontal rencontré sous un certain angle par un autre plan que nous appellerons *plan sécant :* cet angle sera celui de deux perpendiculaires en un même point de l'intersection des deux plans, situées dans ces deux plans. Or on peut imaginer dans le plan sécant une droite quelconque non parallèle à cette intersection, et deux perpendiculaires en un point quelconque de cette droite, dont l'une soit dans le plan sécant, et dont l'autre située hors de ce plan, fasse avec elle un angle égal à celui qui mesure l'inclinaison du plan sécant sur

le plan horizontal : le plan mené par cette dernière perpendiculaire et par la droite tracée dans le plan sécant, ne sera pas horizontal, ou parallèle au plan horizontal, et cependant il fera avec le plan sécant le même angle que celui-là. Donc la réciproque n'a pas lieu. On peut étendre ce raisonnement aux autres inverses.

PROPOSITION V.

Théorème. *Lorsque trois droites sont perpendiculaires entre elles, les trois plans qu'elles déterminent le sont entre eux.* (Géom. Prop. XVIII, Schol.)

Réciproque. *Si trois plans sont perpendiculaires entre eux, leurs intersections le sont entre elles.*

Fig. 49. Soient BAC, BAD, CAD trois plans perpendiculaires entre eux, je dis que leurs intersections le sont entre elles. Car, les deux plans BAC, BAD étant perpendiculaires à un troisième CAD, leur intersection (*) BA (Géom. Liv. V, Prop. XX) est perpendiculaire au plan CAD, et par conséquent aux lignes AC, AD. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Théorème. *Si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.* (Géom. Prop. XX.)

Réciproque. *Si l'intersection de deux plans est perpendiculaire à un troisième, ces deux plans sont chacun perpendiculaires à ce troisième ;*

Car chacun des deux premiers plans passe par une droite perpendiculaire au troisième.

(*) Nous faisons usage ici d'une proposition démontrée subséquemment dans la Géométrie ; mais on observera qu'elle n'exige pas la démonstration de cette réciproque.

PROPOSITION VII.

Théorème. *Si un angle solide est formé par trois angles plans, la somme de deux quelconques de ces angles sera plus grande que le troisième.* (Géom. Proposit. XXI, Théor.)

Réciproque. *Si de trois angles plans donnés, l'un quelconque est plus petit que la somme des deux autres, et si de plus leur somme est moindre que quatre droits, on pourra former un angle solide avec ces trois angles plans.*

En effet, appelons A, B, C les trois angles plans donnés : d'après les conditions de l'énoncé, on aura $A < B + C$, $B < A + C$, $C < A + B$. Des deux dernières inégalités, on tire celles-ci, $A > B - C$, $A > C - B$ qui n'expriment qu'une seule et même chose; savoir : que l'angle A est plus grand que la différence des deux autres. Ainsi toutes les conditions de l'énoncé équivalent à celles exprimées par les deux inégalités $A < B + C$ et $A > B - C$; donc (Géom. Liv. V, Prop. XXIV, Schol.) l'angle solide peut être formé. La condition que la somme des angles A, B, C soit moindre que quatre droits, est une conséquence nécessaire de ce qui est démontré (Géom. Proposit. XXII, Théor.); car si la somme $A + B + C$ était seulement égale à quatre droits, l'angle solide n'existerait plus, il serait l'angle plan. (*Fig.* 196, *Géom. de Legendre.*)

PROPOSITION VIII.

Théorème. *Si deux angles solides sont composés de trois angles plans égaux chacun à chacun, les plans dans lesquels sont les angles égaux, seront également inclinés entre eux.* (Géom. Prop. XXXIII, Théor.)

Réciproque. *Si deux angles solides sont formés par trois plans également inclinés entre eux, les angles plans seront égaux chacun à chacun.*

Fig. 50. Soient S, S′ deux angles solides formés par des plans également inclinés; je dis que les angles de ces plans sont égaux chacun à chacun, c'est-à-dire qu'on a ASB = A′S′B, ASC = A′S′C′, et BSC = B′S′C′. En effet, posons le sommet S sur S′, et dirigeons SA suivant S′A′; appliquons de plus le plan ASC sur le plan A′S′C′ qui sera celui de la planche, le plan ASB s'appliquera sur le plan A′S′B′. Soient S′C, S′B, les positions que prendront, par suite de cette superposition, les lignes SC, SB du premier angle solide dans les plans des faces A′S′C′, A′S′B′, prolongées, s'il est nécessaire. Supposons, pour l'intelligence de la figure, que l'angle S′ soit coupé par un plan quelconque *ab′bcc′*. Tout cela posé, il est facile de voir que les plans *b′S′c′*, *bS′c*, étant prolongés suffisamment, se couperont suivant une droite S′I située toute entière hors de l'angle solide; de sorte que IS′*c′b′* n'est qu'un seul et même plan ainsi que IS′*cb*. Or, d'un point quelconque M de S′I, abaissons sur le plan A′S′B′ la perpendiculaire MP; du point P, menons les perpendiculaires PK′, PK aux lignes S′B′, S′B, et joignons MK′ et MK : ces droites (Géom. Liv. V, Prop. VI, Théor.) seront perpendiculaires aux lignes S′B′, S′B, et par conséquent les angles PK′M, PKM mesurent les inclinaisons sur le plan A′S′B′, des plans C′S′B′ et CS′B prolongés. De plus, PK′ étant plus petit que PK, les obliques MK′, MK sont inégales, et conséquemment inégalement inclinées; donc les angles PK′M, PKM seraient inégaux. Enfin il est facile de voir que ces angles sont respectivement les supplémens des inclinaisons des plans *b′S′c′*, *bS′c* sur A′S′B′. Donc ces inclinaisons seraient inégales, ce qui est contre notre hypothèse; donc l'angle plan ASB = A′S′B′. Maintenant les deux angles solides ayant un angle plan égal adjacent à des inclinaisons égales, sont évidemment égaux. Donc, etc.

Notre démonstration paraît supposer que les lignes SB, SC du premier angle solide, tombent d'un même côté du plan B′S′C′; mais on s'assurera facilement qu'elle s'étend au cas où ces lignes seraient disposées de différens côtés de ce plan.

Remarque.

Etant donné un angle solide trièdre S, on en formera toujours le symétrique, en prolongeant les arêtes SA, SB, SC au-delà du point S; car il est évident, 1° que les angles plans A′SC′, A′SB′, B′SC′, respectivement égaux aux angles plans ASC, ASB, BSC, seront disposés autrement que ceux-ci; 2° que l'angle entre deux quelconques des trois faces ASC, ASB, BSC, sera égal à l'angle entre celles des faces de l'angle solide opposé, qui sont les prolongemens de celles-là. Cette manière de former un angle solide symétrique d'un autre, est simple; et lorsqu'il sera question de démontrer, par exemple, que les angles solides aux deux extrémités de la diagonale d'un parallélepipède sont symétriques l'un de l'autre, il suffira de prolonger les arêtes de l'un de ces angles, et de prouver que l'angle solide qui en résulte est parfaitement égal à l'autre. Pl. 12, Fig. 267.

Maintenant l'arête SB′ se trouvant au-dessous du plan des angles A′SC′, ASC, si l'arête SB est au-dessus de ce plan, que l'on conçoive que le sommet S restant fixe, le plan C′SA′ tourne en faisant une demi-révolution au-dessus du plan de la planche, jusqu'à venir en ASC, SC′ tombant sur SA, et SA′ sur SC, il est visible que l'arête SB′ ne peut venir suivant SB : cette coïncidence des arêtes SB, SB′ est impossible de quelque manière qu'ait lieu celle des angles A′SC′, ASC.

Remarques.

I. La plus légère attention suffit pour apercevoir que les propositions I, II (Théor. et Cor.), III, IV (Théor. et Cor. II), VI (Schol.), VIII, IX, XII (Théor.), XIII (Théor.), XIV, XV, XVII (Théor.), XVIII (Théor.), n'admettent pas de réciproques.

II. Les problèmes réciproques de ceux des propositions XXIV et XXV, seront résolus ci-après, à l'article des Plans. *(Recueil de Théor. et de Probl.)*.

LIVRE SIXIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Dans tout parallélepipède, les angles opposés sont égaux et parallèles* (Géom., Liv. VI, Prop. IV, Théor.)

Réciproque. *Si dans un prisme quadrangulaire, les plans opposés sont égaux et parallèles, ce prisme est un parallélepipède.*

Fig. 51. En effet, les plans opposés AG, DH étant égaux et parallèles, AB est égal et parallèle à CD; donc ABCD est un parallélogramme, et par conséquent le solide AH est un parallélepipède. Donc, etc.

PROPOSITION II.

Théorème. *Dans tout parallélepipède, les angles solides opposés sont symétriques l'un de l'autre.* (Géom., Prop. V, Théor.)

Fig. 51. Réciproque. *Si dans un prisme quadrangulaire, les angles solides opposés sont symétriques l'un de l'autre, ce prisme est un parallélepipède.*

Soit AH un prisme quadrangulaire, dans lequel les angles solides opposés soient symétriques l'un de l'autre; je dis que ce prisme est un parallélepipède. Car, en vertu de la symétrie des angles D et G, on a l'angle ADC = FGH : or l'angle

FGH = ABC ; donc l'angle ABC = ADC. Les angles opposés A et H étant symétriques, on prouvera de même que l'angle BCD = BAD ; donc (Liv. I, Prop. XIV, Récip.) ABCD est un parallélogramme. Donc le prisme quadrangulaire AH est un parallélepipède. Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Dans tout parallélepipède, les diagonales menées par les sommets des angles opposés, se coupent mutuellement en deux parties égales.* (*Ibid.*)

Réciproque. *Si dans un prisme quadrangulaire, les deux diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, ce prisme est un parallélepipède.*

Soit AH un prisme quadrangulaire, dans lequel les deux diagonales DG, FC se coupent en deux parties égales; je dis que ce prisme est un parallélepipède. Car (Liv. I, Prop. XV, Récip.) la figure CDFG est un parallélogramme; donc CD est égal et parallèle à FG, et par conséquent à AB ; donc la figure est un parallélogramme; donc le prisme quadrangulaire AH est un parallélepipède. Donc, etc. Fig. 51.

PROPOSITION IV.

Théorème. *Le plan qui passe par deux arêtes parallèles opposées d'un parallélepipède, divise ce solide en deux prismes triangulaires symétriques l'un de l'autre.* (Géom. Prop. VI, Théor.)

Réciproque. *Si un plan conduit suivant deux arêtes AF, CH opposées d'un prisme quadrangulaire, le divise en deux prismes triangulaires ABCFGH, ACDHEF symétriques l'un de l'autre, ce prisme est un parallélepipède.* Fig. 51.

Car ces prismes triangulaires étant symétriques, les angles opposés D et G le sont aussi (Géom. Prop. II, Schol.). De plus, en faisant passer un plan par les arêtes opposées DE,

BG, on prouvera de même que les angles solides A et H sont symétriques l'un de l'autre; donc (Prop. II, Récip.) le prisme quadrangulaire AH est un parallélepipède.

On déduira d'une autre manière la même conclusion, en observant que les lignes AF, CH étant égales et parallèles, la figure ACHF est un parallélogramme, et que par conséquent ses deux diagonales AH, CF., qui sont aussi celles du prisme, se coupent en deux parties égales; et que la même chose a lieu pour deux autres diagonales DG, CF. Donc (Prop. III, Récip.)

PROPOSITION V.

Théorème. *Toute section faite dans un prisme par un plan parallèle à sa base, est égale à cette base.* (Géom. Prop. VII, Coroll.)

Fig. 52. Réciproque. *Si on coupe un prisme par un plan, de manière que la section soit égale à la base, elle lui sera aussi parallèle.*

Cette proposition inverse n'a pas lieu. En effet, soient BACDE, BAC'D'E' deux polygones ayant les angles et les côtés égaux; puisqu'ils ont le côté AB commun, si on les applique tous deux sur le plan de la planche, ils coïncideront. Concevons que le polygone BAC'D'E' tourne autour de AB comme charnière, et qu'il prenne une position quelconque BAC'D'E', dans l'espace : les points C, D, E décriront des arcs de cercles CC', DD', EE', dont les centres c, d, e seront dans l'axe de rotation AB, et dont les rayons Cc, Dd, Ee seront perpendiculaires à cet axe: les plans de ces cercles seront donc parallèles; et comme les arcs CC', DD', EE' sont semblables, si on prend $d\varepsilon = e$E, $d\gamma = c$C, on aura arc $\varepsilon\varepsilon'$ = arc EE', arc $\gamma\gamma'$ = arc CC'; donc les cordes DD', $\varepsilon\varepsilon'$, $\gamma\gamma'$ seraient parallèles; donc aussi les cordes des arcs DD', EE', CC', prolongées également, à partir des points D, E, et C,

seront parallèles; donc les sommets E′, D′, C′ se retrouveront sur les arêtes d'un prisme ayant ACDEB pour base, en supposant par B et A des arêtes parallèles et égales à celles qui partent des points E, D et C. Ce prisme sera donc coupé par un plan non-parallèle à la base, suivant une section égale à cette base; et toutes les sections faites dans ce prisme par des plans parallèles à l'un ou à l'autre des polygones BACDE, BAC′D′E′, seront des polygones parfaitement égaux à ceux-là, et conséquemment égaux entre eux.

PROPOSITION VI.

Théorème. *Deux parallélepipèdes rectangles qui ont même base, sont entre eux comme leurs hauteurs.* (Géom. Prop. XII.)

Réciproque. *Si deux parallélepipèdes rectangles sont comme leurs hauteurs, ils auront même base.*

En effet, soient P et Q deux parallélepipèdes rectangles, H et H′ leurs hauteurs, B et B′ leurs bases, nous aurons $P : Q :: H : H'$. Or si le rectangle B′ n'est pas équivalent à B, sur cette base B′ construisons un parallélepipède R dont la hauteur soit H; nous aurons, d'après la directe, $R:Q:H:H'$, d'où on déduirait $R = P$; conclusion absurde, puisque les parallélepipèdes R et P ayant même hauteur, ont des bases différentes. Donc, etc.

Remarquons que la condition énoncée n'emporte cependant pas la coïncidence des bases B et B′, mais seulement, comme nous venons de le prouver, leur équivalence.

PROPOSITION VII.

Théorème. *Deux parallélepipèdes rectangles qui ont même hauteur, sont entre eux comme leurs bases.* (Géom. Prop. XIII.)

Réciproque. *Si deux parallélepipèdes rectangles sont entre eux comme leurs bases, ils ont même hauteur.*

On emploiera, pour démontrer cette réciproque, un raisonnement semblable à celui que nous avons fait précédem.

PROPOSITION VIII.

Théorème. *Si une pyramide quelconque est coupée par un plan parallèle à sa base, les côtés et la hauteur seront divisés proportionnellement.* (Géom. Prop. XVI, Théor. 1°.)

Réciproque. *Si un plan divise les côtés d'une pyramide proportionnellement, il est parallèle à sa base.*

Fig. 53. En effet, soit SABCD une pyramide dont les côtés SA, SB, SC, SD soient coupés en a, b, c, d, par le plan $abcd$, de manière qu'on ait

$$Sa : aA :: Sb : bB :: Sc : cC :: Sd : dD.$$

De cette suite on déduit ces deux proportions

$$Sa : aA :: Sb : bB, \quad Sb : bB :: Sc : cC;$$

donc les droites ab, bc sont parallèles aux droites AB, BC; donc (Géom. Liv. V, Prop. XIII, Théor.) les plans abc, ABC sont parallèles. Donc, etc.

PROPOSITION IX.

Théorème. *Si une pyramide est coupée par un plan parallèle à la base, la section sera un polygone semblable à cette base.* (Géom. Prop. XVI, Théor. 2°.)

Réciproque. *Si la section d'une pyramide par un plan, est un polygone semblable à la base, le plan sécant sera parallèle à cette base.*

S'il existait dans une pyramide polygonale, une section non parallèle et cependant semblable à la base, il y aurait évidemment lieu à une section égale à la base, laquelle serait parallèle à la première : cette section serait donc une position particulière de celle de la base dont le plan aurait tourné autour d'un axe

fixe mené dans le plan de cette base; mais, dans ce mouvement, les sommets des angles de la base décriraient des arcs de cercles dont les plans seraient parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe de rotation, et tous ces cercles auraient leurs centres placés sur cet axe, aux points où il est rencontré par les perpendiculaires qu'on lui mènerait de tous ces sommets. Or quelle que soit la position de cet axe par rapport au polygone qui sert de base à la pyramide, il est impossible que les arcs décrits par les sommets de ces angles, dans le mouvement du plan de la base autour de l'axe, rencontrent les arêtes de la pyramide, et qu'ainsi ces sommets se retrouvent tous en même temps sur ces arêtes, pour former sur le contour de la pyramide le polygone supposé égal à la base.

Ce raisonnement peut être facilement suivi sans le secours d'une figure d'autant plus inutile ici qu'elle ne montrerait qu'une position particulière de l'axe de rotation, qui cependant doit être vue dans une infinité de positions.

Remarque.

On observera à l'égard de la pyramide triangulaire, dont la section par un plan parallèle à la base, serait le triangle ADF, que le point D, dans le mouvement supposé autour de l'axe AF, peut venir se placer sur l'arête SD, S étant le sommet de la pyramide, puisqu'il suffit que cette arête soit dans le plan de l'arc de cercle décrit par D. La pyramide qui a pour base cette nouvelle position du plan ADF, admet elle-même une section semblable à sa base par un plan non-parallèle. D'où il résulte qu'on peut faire dans une pyramide triangulaire plusieurs sections semblables à la base, par des plans qui ne lui seraient pas parallèles. Fig. 54

PROPOSITION X.

Théorème. *Si on coupe deux pyramides de même hauteur, et dont les bases sont situées sur le même plan, par un plan*

parallèle à celui des bases, les sections seront entre elles comme les bases. (Géom. Prop. XVI, Cor.)

Réciproque. *Si deux pyramides de même hauteur sont coupées par un plan tel que les sections soient comme les bases, les sections sont parallèles aux bases.*

55. En effet, si le plan des sections n'était pas parallèle aux bases, par l'un quelconque des sommets de l'un des polygones, on pourrait faire passer un plan parallèle aux bases, qui donnerait d'autres sections $xyz_{,}u_{,}t_{,}$, et $x'y'u_{,,}z_{,,}$, telles que l'on aurait

$$xyz_{,}u_{,}t_{,} : x'y'u_{,,}z_{,,} :: ABCDE : A'B'C'D' ;$$

mais, par hypothèse,

$$xyzut : x'y'u'z' :: ABCDE : A'B'C'D' ;$$

donc

$$xyz_{,}u_{,}t_{,} : xyzut :: x'y'u_{,,}z_{,,} : x'y'u'z' ;$$

(Prop. IX, Récip.)

Remarque.

La même proposition n'est pas vraie dans le cas de la pyramide triangulaire.

En effet, concevons deux pyramides triangulaires coupées par un plan parallèle aux bases ; nous avons prouvé qu'il existait dans ces pyramides des sections semblables aux bases, sans leur être parallèles ; donc, si par deux côtés homologues des premières sections, on mène des triangles égaux aux premiers, ils seront dans le rapport des bases, sans leur être parallèles. (Prop. IX, Récip. Rem.)

Le théorème direct peut aussi s'inverser de cette manière.

Si deux pyramides quelconques qui reposent sur le même plan, sont coupées par un plan parallèle à celui des bases,

ensorte que ces sections soient entre elles comme les bases, elles auront même hauteur.

En effet, soient B et H la base et la hauteur d'une pyramide, b et h celles de la pyramide partielle, B', H', b', h' les bases et les hauteurs correspondantes dans la seconde pyramide. On aura

$$B : b :: H^2 : h^2, \qquad B' : b' :: H'^2 : h'^2;$$

mais, par hypothèse,

$$B : b :: B' : b'; \text{ donc } H : h :: H' : h';$$

donc

$$H - h : H' - h' :: H : H' :$$

or $H - h = H' - h'$, donc $H = H'$. Donc, etc.

PROPOSITION XI.

Théorème. *Deux pyramides triangulaires semblables ont les faces homologues semblables, et les angles solides homologues égaux.* (Géom. Prop. XXIII, Théor.)

L'énoncé de la réciproque est la définition même de la similitude de deux pyramides triangulaires (Géom. Liv. VI, Définit. XVII.)

PROPOSITION XII.

Théorème. *Deux pyramides triangulaires semblables ont les côtés homologues proportionnels.* (Géom. Prop. XXIII, Cor. I.)

Réciproque. *Si deux pyramides triangulaires ont les côtés homologues proportionnels, elles sont semblables.*

Cette proposition n'est pas généralement vraie. Car, soient SABC, S'ABC deux pyramides triangulaires symétriques, leurs faces seront égales; donc SA = S'A, SB = S'B, SC = S'C. Si l'on coupe la pyramide S'ABC par le plan Fig. 56.

A'B'C' parallèle à la base, la pyramide S'A'B'C' sera semblable à S'ABC. (Géom. Prop. XXIII, Cor. III.) Donc

$$S'A' : S'A :: S'B' : S'B :: S'C' : S'C;$$

et par conséquent

$$S'A' : SA :: S'B' : SB :: S'C' : SC;$$

et cependant les deux pyramides SABC et S'A'B'C' ne sont pas semblables. Le même raisonnement s'applique aux pyramides polygonales.

Mais si on suppose que les plans qui forment les angles solides S et S' sont disposés de la même manière, alors la proposition est vraie. (*Voy.* Géom. Prop. XXIII, Schol.)

Remarque.

Mais à l'égard des pyramides polygonales dont les faces sont semblablement disposées, il n'est pas vrai qu'elles soient semblables.

g. 57. En effet, construisons deux triangles ABC, A'BC égaux et semblablement placés; sur le milieu de AA', élevons la perpendiculaire So; joignons un des points de cette perpendiculaire avec les sommets A,B,D,E,C,A', alors SA' = SA, et les deux pyramides SABDEC et SA'BDEC, sans être égales, auront leurs faces égales et semblablement placées. Donc toute pyramide retranchée de l'une d'elles par un plan parallèle à la base, aura ses faces semblables à celles de l'autre, sans cependant qu'elle lui soit semblable.

PROPOSITION XIII.

Théorème. *Dans deux pyramides triangulaires semblables, l'inclinaison de deux faces quelconques est égale à l'inclinaison des faces homologues dans l'autre.* (*Ibid.* Cor. II.)

Réciproque. *Si deux pyramides triangulaires sont telles que l'inclinaison de deux faces quelconques de l'une, soit égale à*

l'inclinaison de deux faces de l'autre, ces deux pyramides sont semblables.

Cette proposition inverse n'est pas généralement vraie; car concevons deux pyramides triangulaires symétriques, elles auront leurs angles dièdres égaux, sans être égales; ainsi toute pyramide retranchée de l'une d'elles par un plan parallèle à la base, ne sera pas semblable à l'autre, quoique les angles dièdres compris entre les faces homologues, soient égaux.

Il en est de même de deux pyramides polygonales.

Mais si on apporte cette nouvelle restriction, que les faces homologues soient semblablement disposées; alors l'énoncé sera vrai.

Car, soient SABC, TDEF ces deux pyramides. De ce que leurs faces sont également inclinées entre elles, il suit (Liv. V, Prop. VIII) que les angles solides A et D, B et E, C et F, S et T sont égaux; donc les triangles ASB, DTE sont semblables, ainsi que les triangles BSC, ETF : de plus, ces triangles sont semblablement placés; donc les pyramides SABC, TDEF sont semblables. Fig. 58.

PROPOSITION XIV.

Théorème. *Si on coupe une pyramide triangulaire par un plan parallèle à la base, la pyramide partielle est semblable à la pyramide totale.* (*Ibid.*, Cor. III.)

Réciproque. *Si deux pyramides triangulaires sont semblables, et que l'on superpose les angles trièdres au sommet, les bases seront parallèles.*

En effet, puisque les deux pyramides triangulaires SABC et SA'B'C' sont semblables, les faces SAB, SA'B'; SAC, SA'C' sont semblables, on aura par conséquent Fig. 59.

$$SA : SA' :: SB : SB',$$
$$SA : SA' :: SC : SC';$$

on ne considère que celles qui ont pour base commune un même triangle de chacune des bases; il s'ensuit qu'on ne considérera que celles qui déterminent hors de ces mêmes bases les sommets des angles solides respectifs des deux polyèdres. Or, par hypothèse, ces pyramides sont semblables chacune à chacune; donc aussi les polyèdres sont semblables.

PROPOSITION XVIII.

Théorème. *Deux diagonales homologues quelconques de deux polyèdres semblables, sont entre elles comme deux côtés homologues quelconques.* (*Ibid.*)

Réciproque. *Si deux polyèdres sont tels qu'en joignant deux sommets quelconques du premier et les deux sommets correspondans du second, les deux diagonales qu'on obtient, soient entre elles comme deux côtés correspondans quelconques, ces deux polyèdres sont semblables.*

La démonstration de cette réciproque est analogue à la précédente.

PROPOSITION XIX.

Théorème. *Deux polyèdres semblables peuvent se partager en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune et semblablement placées.* (Géom. Prop. XXV.)

Réciproque. *Si deux polyèdres sont décomposables en un même nombre de pyramides triangulaires semblables chacune à chacune et semblablement disposées, ces deux polyèdres seront semblables.*

Supposons faite dans les deux polyèdres, la décomposition nécessaire à la démonstration de la directe. Soit P et *p* les sommets communs de toutes les pyramides. (Fig. 61.)

On démontrera facilement que si, dans le premier polyèdre, les bases ABC, ACD, ADE de plusieurs pyramides sont dans un même plan et forment une même face polygone

ABCDE, les bases abc, acd, ade des pyramides correspondantes dans le second polyèdre, sont aussi dans un même plan et forment une même face polygone $abcde$ semblable à ABCDE. De là on conclura que les deux polyèdres sont composés d'un même nombre de faces semblables chacune à chacune et semblablement placées. Or, à cause de la similitude des pyramides, les angles solides correspondans seront égaux; donc les polyèdres seront semblables.

PROPOSITION XX.

Théorème. *Deux pyramides semblables sont entre elles comme les cubes des côtés homologues.* (Géom. Prop. XXVI.)

Réciproque. *Si deux pyramides sont entre elles comme les cubes des côtés homologues, elles sont semblables.*

1°. Considérons d'abord des pyramides triangulaires. Nous aurons, d'après l'énoncé, Fig. 58.

$$\overline{AB}^3 : \overline{DE}^3 :: \overline{BC}^3 : \overline{EF}^3 :: \overline{AC}^3 : \overline{DF}^3 :: \overline{SA}^3 : \overline{TD}^3 :: \overline{SB}^3 : \overline{TE}^3 :: \overline{SC}^3 : \overline{TF}^3,$$

ou

$$AB : DE :: BC : EF :: AC : DF :: SA : TD :: SB : TE :: SC : TF.$$

Les pyramides SABC, TDEF ont donc leurs arêtes proportionnelles; donc elles sont semblables. On voit cependant que la considération des pyramides symétriques dont nous avons fait usage, restreint la généralité de cette proposition.

2°. Il n'en est pas de même des pyramides polygonales; car la seule proportionnalité des côtés ne peut pas même établir la similitude des bases de ces pyramides.

PROPOSITION XXI.

Théorème. *Deux polyèdres semblables sont entre eux comme les cubes des côtés homologues.* (Géom. Prop. XXVII.)

Réciproque. *Si deux polyèdres sont entre eux comme les cubes des côtés homologues, ils sont semblables.*

Un raisonnement semblable à celui qui a été employé dans la seconde partie de la proposition précédente, prouvera l'absurdité de cette réciproque.

Remarques.

I. Les propositions I, III, donnent lieu à des énoncés inverses dont l'évidence se reconnaît avec la plus légère attention.

II. L'absurdité des réciproques des propositions II, XI, XVII, XX est manifeste; celle de la proposition IX est prouvée par la proposition X.

III. Les réciproques des seconds énoncés compris dans le Cor. de la prop. XV, et dans les Cor. II des prop. XVIII et XIX, se prouveront comme on l'a fait prop. VI.

Les premiers énoncés de ces mêmes corollaires donnent lieu à des réciproques que l'on démontrera facilement par le raisonnement employé (Liv. III, Prop. I.)

LIVRE SEPTIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Tout grand cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales.* (Géom. Liv. VII, Prop. I, Cor. III.)

Réciproque. *Si un cercle divise la sphère et sa surface en deux parties égales, il passe par le centre de la sphère.*

Le raisonnement qui démontre cette réciproque, est semblable à celui que nous avons employé (Liv. II, Prop. I.) Donc, etc.

PROPOSITION II.

Théorème. *Le centre d'un petit cercle et celui de la sphère sont sur une même droite perpendiculaire au plan du petit cercle.* (*Ibid.* Cor. IV.)

Réciproque. *Si, du centre de la sphère, on abaisse une perpendiculaire sur le plan d'un petit cercle, le pied de cette perpendiculaire sera le centre de ce petit cercle.*

La démonstration de cette réciproque est comprise dans celle du théorème de la proposition I (Géom. Liv. VII.). Donc, etc.

PROPOSITION III.

Théorème. *Les petits cercles sont d'autant plus petits qu'ils sont plus éloignés du centre de la sphère.* (*Ibid.* Cor. V.)

Réciproque. *Les petits cercles sont d'autant plus éloignés du centre, qu'ils sont plus petits.*

Lemme. *Les petits cercles également éloignés du centre,*
52. *sont égaux.* En effet, soient GH, IK deux petits cercles quelconques également éloignés du centre de la sphère. Si de ce centre, on abaisse les perpendiculaires CP, CQ sur leurs plans, les points P et Q seront leurs centres. Puisque CP = CQ, par hypothèse, les triangles rectangles CPG, CQK sont égaux, et l'on a PG = QK. Donc, etc.

Réciproquement. *Les petits cercles égaux, sont également éloignés du centre.* Car les triangles rectangles CPG, CQK sont encore égaux dans ce cas.

Soient maintenant EF, GH deux petits cercles inégaux quelconques; soit GH < EF, je dis qu'on aura CP > CO, CP, CO étant deux rayons perpendiculaires aux plans des petits cercles. Car, si l'on pouvait avoir CP = CO, on aurait GH = EF : ce qui est contre l'hypothèse. Si l'on supposait CP < CO, il viendrait, d'après la directe, GH > EF : ce qui n'a pas lieu; donc CP > CO. Donc, etc.

PROPOSITION IV.

52. Théorème. *Si l'on mène le diamètre DL perpendiculaire au plan du grand cercle AMB, les extrémités D et L de ce diamètre sont les pôles du cercle AMB, et de tous les petits cercles, comme INK qui lui sont parallèles.* (Géom. Prop. VI, Théor.)

Réciproque. *La droite DL qui joint les pôles D et L du grand cercle AMB et du petit cercle INK, passe par les centres de ces cercles et leur est perpendiculaire.*

Car puisque le point D est le pôle du cercle AMB, tous les arcs de grands cercles tels, que DM, sont égaux. Menons CM, CM, et joignons DM, DM. Puisque le point L est le pôle du cercle AMB, les arcs LM sont égaux; donc l'angle

MDC = MDC ; donc les triangles MDC, MDC sont égaux ; donc MC = MC ; donc le point C est le centre du cercle AMB. De plus CD est perpendiculaire au plan AMB, puisque cette ligne a deux de ses points communs à la perpendiculaire à ce plan, élevée au point C.

Le même raisonnement sert à prouver que le point Q est le centre du cercle INK, et que DQ est perpendiculaire au plan de ce même cercle. Donc, etc.

Remarques.

I. Les réciproques des propositions VII (Théor.), XV (Schol.) XVII (Théor.), se démontrent par des raisonnemens analogues à ceux employés (Prop. VI, Liv. II, III, Liv. I, II, Liv. I.)

II. On discutera facilement les énoncés réciproques de ceux des propositions du Liv. VII dont nous n'avons pas fait mention.

LIVRE HUITIÈME.

PROPOSITION PREMIÈRE.

THÉORÈME. *Si l'on coupe un cylindre par un plan perpendiculaire à l'axe, la section est un cercle égal à chacune des bases.* (Géom. Liv. VIII, Défin. I.)

Réciproque. *Si l'on coupe un cylindre, de manière que la section soit un cercle égal à la base, et qui ait son centre dans l'axe de ce cylindre, le plan qui détermine une telle section, est parallèle à la base.*

Fig. 63. En effet, soit ABCD un cylindre, coupé par un plan, de manière que la section soit un cercle égal à la base CD, et dont le centre O soit sur l'axe GH. Si le plan EF pouvait être incliné à la base, son prolongement irait rencontrer le plan de cette base. Donc si par un point quelconque K de cette intersection et par le centre O, l'on mène la droite KFE, et si par cette droite et l'axe GH, l'on conduit un plan, son intersection avec le plan de la base, sera la droite KCD; donc EF ne serait pas perpendiculaire à AD. Cela posé, du point F, abaissons FI perpendiculaire à AD, on aurait FI = CD : or EF = CD; donc on aurait FI=FE : ce qui serait absurde. Donc, etc.

Remarque.

La même propriété n'a pas lieu pour le cylindre oblique,

comme on s'en assurera facilement par un raisonnement à peu près analogue à celui déjà employé (Liv. VI, Prop. V) : mais nous nous dispenserons de le répéter, parce que d'ailleurs la Géométrie élémentaire exclut ce corps.

PROPOSITION II.

Théorème. *Toute section faite suivant l'axe d'un cylindre est double du rectangle générateur.* (Ibid.)

Réciproque. *Si un plan coupe un cylindre, de manière que la section soit un rectangle double du rectangle générateur, cette section passe par l'axe.*

Car, si elle n'y passait pas, son intersection avec la base du cylindre ne serait point un diamètre de cette base : or il est évident que cette section est un rectangle de même hauteur que le rectangle générateur ; donc puisque, par hypothèse, ce rectangle est égal au double du rectangle générateur, leurs bases seront égales : ce qui ne peut être qu'autant que le plan qui détermine la section, passe par l'axe du cylindre.

PROPOSITION III.

Théorème. *Si l'on coupe un cône par un plan parallèle à sa base, la section résultante est un cercle.* (Géomét. Définition II.)

Réciproque. *Si l'on coupe un cône de manière que la section resultante soit un cercle qui ait son centre dans l'axe de ce cône, le plan qui détermine une telle section, est parallèle à la base.* Fig. 6

En effet, soit SAB un cône coupé par un plan, de manière

que la section DE soit un cercle ayant son centre O sur l'axe SC; je dis que ce plan est parallèle à la base AB. Car, si le plan DE pouvait être incliné à la base, son prolongement irait rencontrer le plan de cette base. Donc, si par un point quelconque K de l'intersection et par le centre O, l'on mène la droite KED, et si, par cette droite et par l'axe SC, on conduit un plan, son intersection avec le plan de la base sera la droite KBA: on aura donc dans le triangle ASB une ligne DE qui sera coupée en O par la ligne SC, de manière que AC : DO :: CB : OE, d'où l'on conclurait (Liv. III, Prop. XI), que KED est parallèle à AB : ce qui est absurde. Donc, etc.

Remarque.

Il existe dans le cône oblique, que nous ne considérons pas ici, une section appelée *anti-parallèle* qui jouit de la propriété énoncée.

PROPOSITION IV.

Fig. 65. Théorème. *La surface convexe d'un tronc de cône, est égale à son côté multiplié par la cirçonférence d'une section faite à égales distances des deux bases.* (Géomét. Prop. VIII, Théor.)

Réciproque. *Si l'on coupe un cône SAB par un plan DE, de manière que la surface convexe du solide ABED, soit égale au produit de BE par la circonférence que détermine un plan conduit par le milieu de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du plan DE sur le plan de la base AB; je dis que le plan DE est parallèle à la base AB.*

En effet, si le plan DE n'est pas parallèle au plan AB, soit K le point le plus élevé de ce plan : par le point E, conduisons un plan parallèle à la base AB, et, de ce même point,

abaissons EP perpendiculaire au plan AB. Soit M le milieu de EP, et, par ce point, conduisons un plan qui détermine le cercle FG. Nommons S la surface convexe du solide ABED, et S′ celle du cône tronqué ABEK : on aura, par hypothèse, $S = EB \times FG$, et, en vertu de la directe, $S' = EB \times FG$. D'où l'on conclurait $S = S'$: ce qui est absurde. Donc, etc.

Remarques.

I. La proposition VIII (Théor.) admet une réciproque dont la démonstration est indiquée par l'énoncé.

II. On se convaincra sans peine que la proposition XII (Théor.) ne donne pas lieu à réciproque.

III. Le théorème compris dans le problème de la proposition XIII, admet une réciproque que l'on démontrera très-facilement *ab absurdo*.

IV. La démonstration de la réciproque de la proposition XVIII (Cor.) est analogue à celle que nous venons de donner de la proposition VIII. (Théor.)

V. On discutera facilement les énoncés réciproques de ceux des propositions dont nous ne faisons pas mention.

RECUEIL

DE THÉORÈMES ET DE PROBLÈMES.

Sur les Lignes et sur les Triangles.

PROBLÈME I. *Deux droites et un point étant donnés, mener par le point une ligne qui aille passer par le point de concours des deux droites.*

Fig. 66. Soient CD, EF les deux droites qui concourent, et A le point donné. On mènera EC, FD parallèles entre elles, on joindra A et E; puis par F on tirera FB parallèle à EA, et égale à la quatrième proportionnelle aux droites EC, FD et EA; la droite AB prolongée ira passer par O. Cette construction donne les proportions

$$\left.\begin{array}{l} EC : FD :: EO : FO \\ EA : FB :: EO : FO \end{array}\right\} \text{d'où } EC : FD : EA : FB.$$

Ce procédé est utile lorsque, dans le développement conique, les méridiens se rencontrent fort loin du centre de la carte : nous laissons au lecteur à l'étendre au cas où le point A serait donné entre les droites EF, CD.

Fig. 67. On trouve dans le n° 8 de *la Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, cette solution très-commode, en ce qu'elle n'exige que l'usage de la règle. Le point A donné

étant entre EF, CD, on mènera par A deux droites quelconques *gAh*, *fAk*, puis les droites *hf* et *kg* qui, prolongées, se couperont en *l*; par *l* on mènera la droite quelconque *ln*, qui rencontrera EF en *m*; on joindra *km*, *gn* qui se couperont en B, et la ligne AB prolongée ira passer par le point de concours des droites EF, CD.

Si le point A est hors de l'angle des deux droites, on mènera par ce point deux droites quelconques A*h*, A*k* qui couperont EF dans les points *f* et *g* : on joindra *gh*, *fk* qui se couperont en *l*; puis on tirera A*lm* qui rencontre EF en *n* : les droites *hm*, *mg*; *mf*, *kn* se rencontreront en B et I, et les trois points I, A, B seront sur une droite qui ira passer par le point de concours des droites EF et CD. Fig. 6

Nous laissons à chercher les raisons de ces constructions.

Théorème I. *Si, à partir du sommet A d'un triangle ABC, on divise les côtés contigus AB, AC, en parties proportionnelles, de manière que l'on ait* Fig. 6

$$AD : AE :: DF : EG :: FH : GI :: HB : IC,$$

et qu'on joigne les point B et C avec les points de division correspondans, par les droites BE et CD, BG et CF, BI et CH, toutes ces droites se couperont deux à deux sur la ligne menée du sommet du triangle au milieu de la base.

En effet, soit M le milieu de la base BC : par le point M et par le point O menons MO; je dis que cette droite va passer par le point A. D'abord DE sera parallèle à la base BC, puisque de la suite de rapports égaux donnée, on tire

$$AD : AE :: DF + FH + HB \text{ ou } DB : EG + GI + IC \text{ ou } EC.$$

Cela posé, soit la ligne MO prolongée jusqu'en K : les triangles OBM, OKE semblables donnent

$$BM : MO :: EK : KO;$$

des triangles semblables OCM, OKD, on déduit

CM : MO :: DK : KO.

L'égalité des conséquens de ces deux proportions, donne cette proportion entre les antécédens,

BM : CM :: EK : DK ;

donc DK = KE ; donc la ligne MK prolongée passe par le point A. On prouvera de la même manière que les droites BG, CF, ainsi que les droites BI, CH se coupent sur la ligne AM.

Fig. 70. *Corollaire I.* Il suit de là que *les droites AD, BE, CF, menées des trois sommets d'un triangle ABC aux milieux des côtés opposés, concourent en un même point O.*

On peut encore démontrer directement cette proposition comme il suit.

Problème II. *Soient D, E, F les milieux des trois côtés d'un triangle quelconque ABC; formons le triangle DEF; soient G, H, I les milieux des trois côtés de ce nouveau*
Fig. 71. *triangle, qui donnent le triangle GHI; formons de la même manière un troisième triangle KLM, et ainsi de suite : on demande un triangle dont la surface soit la limite de la somme des surfaces des triangles DEF, GHI, KLM, etc. formés de cette manière.*

Nommons S, S', S'', S''', les surfaces des triangles ABC, DEF, GHI, KLM, etc. désignons par b la base BC du triangle ABC, et par h sa hauteur : il est facile de voir qu'on aura successivement

$$S=\frac{bh}{2},\ S'=\frac{bh}{8},\ S''=\frac{bh}{32},\ S'''=\frac{bh}{128},\ \text{etc.}$$

Donc

$$\frac{S}{S'+S''+S'''+\text{etc.}}=\frac{\frac{bh}{2}}{\frac{bh}{2}\times(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc.})}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\text{etc.}}$$

Or (Alg., 1re Sect., Ch. XVI), la limite de la série $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+$ etc. est $\frac{1}{3}$; donc

$$\frac{S}{S'+S''+S'''+\text{etc.}}=\frac{3}{1},$$

et

$$S : S'+S''+S'''+\text{etc.} :: 3 : 1.$$

Si maintenant nous divisons la base BC en trois parties égales, il est évident que chacun des triangles ABN, ANR, ARC résoudra la question proposée.

Corollaire I. Menons les lignes AD, BE, CF : elles passeront par les sommets des triangles successifs DEF, GHI, KLM, etc. et le dernier de ces triangles est un point ; donc *les lignes menées des sommets des trois angles d'un triangle, aux milieux des côtés opposés, se coupent en un point.*

Nous donnerons une autre démonstration de cette proposition.

A, B, C étant les trois sommets d'un triangle, D, E, F les milieux des côtés opposés, AD, CF se rencontreront en un point O, et il reste à prouver que la ligne BOE sera droite. Menons ED qui rencontre CF en K ; les triangles semblables BOF, EOK donnent la proportion Fig. 70.

$$BO : BF :: EO : EK,$$

et multipliant les conséquences par 2,

$$BO : 2BF \text{ ou } BA :: EO : 2EK \text{ ou } ED.$$

Donc les triangles AOB, DOE sont semblables; donc l'angle AOB est égal à l'angle EOD : conséquemment la ligne BOE est droite, puisque la ligne AD est droite.

Corollaire I. De la considération des triangles semblables AOB, ODE, on déduit $OD = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{3} AD$; donc $AO = \frac{2}{3} AD$. Pareillement $OE = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{3} BE$, et $BO = \frac{2}{3} EB$; $FO = \frac{1}{2} OC = \frac{1}{3} CF$, et $CO = \frac{2}{3} CF$.

Fig. 70. Théorème II. *Soient D, E, F les milieux des trois côtés d'un triangle quelconque ABC : si l'on mène les droites AD, BE, CF qui se coupent en O, la somme des quarrés des trois distances AO, BO, CO, sera le tiers de la somme des quarrés des côtés AB, AC, BC, c'est-à-dire qu'on aura*

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = \frac{1}{3} (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2).$$

En effet, les points D, E, F étant, d'après l'hypothèse, les milieux des côtés BC, AC, AB, on aura successivement

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{BD}^2 + 2\overline{AD}^2$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AE}^2 + 2\overline{BE}^2$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AF}^2 + 2\overline{CF}^2.$$

Ajoutant ces trois égalités membre à membre, et divisant par 2 les deux membres de celle qui en résulte, on trouvera

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2.$$

Or on a trouvé (Probl. II, Corollaire I.)

$$\left.\begin{array}{l} AO = \frac{2}{3} AD \\ BO = \frac{2}{3} BE \\ CO = \frac{2}{3} CF \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} AD = \frac{3}{2} AO \\ BE = \frac{3}{2} BO \\ CF = \frac{3}{2} CO : \end{array}\right.$$

d'ailleurs

$$BD = \frac{1}{2} BC, \quad AE = \frac{1}{2} AC, \quad AF = \frac{1}{2} AB ;$$

la substitution de ces valeurs dans l'égalité précédente, donne, après les réductions, la propriété énoncée.

Coroll. I. De l'égalité qu'on vient de démontrer, on déduit celle-ci :

$$\overline{DO}^2+\overline{EO}^2+\overline{FO}^2=\frac{1}{12}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{BC}^2).$$

Si le triangle ABC était équilatéral, on aurait $3\overline{DO}^2=\frac{3}{12}\overline{AB}^2$, d'où $\overline{AB}^2=12\overline{DO}^2$, ce qui fournit cette proportion

$$AB : DO :: \sqrt{12} : 1,$$

que nous démontrerons en partant d'autres principes.

Problème. III. *Etant données trois droites de position, que nous supposons se rencontrer deux à deux, et un triangle, construire, 1°. un triangle équivalent; 2°. un triangle semblable, sous la condition que chacun des sommets soit situé sur chacune des lignes.*

1°. On mènera entre deux des lignes données, une transversale égale au côté pris pour base du triangle donné, puis en un point quelconque de cette transversale, ayant élevé une perpendiculaire égale à la hauteur du triangle, on mènera par son extrémité une parallèle à la transversale, qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de la troisième ligne donnée : joignant le point avec les deux extrémités de la transversale, on aura le triangle cherché ; en effet ce triangle a même base et même hauteur que le triangle proposé, et de plus ses trois sommets sont sur les trois lignes.

2°. RS, ST, TR étant les trois lignes données, on fera le triangle NnQ égal au triangle donné; puis menant la droite RQ prolongée jusqu'à la rencontre de ST en P, on tirera les Fig. 72.
parallèles PM, Pm à QN, Qn, et joignant m, M, le triangle mMP sera celui qu'on cherche ; car les triangles nQN, mPM ont les angles égaux P et Q entre deux côtés proportionnels.

On observera que la question de construire un triangle équivalent à un triangle donné, sous la condition prescrite dans l'énoncé, n'est impossible que dans un seul cas.

Théorème III. *Les trois hauteurs d'un triangle quelconque, concourent en un même point.*

3. Soit ABC un triangle quelconque; des points B et C, abaissons les perpendiculaires BQ, CP sur les côtés opposés, et soit O le point de rencontre de ces deux droites; menons la ligne AOR; je dis que cette ligne est perpendiculaire au côté BC. En effet, si sur BC et AO comme diamètres, nous décrivons deux cercles, chacun d'eux passera par les points P et Q (Géom., Liv. II, Prop. XVIII, Cor. II). Joignons QP; l'angle PAO ou BAR = PQO ou PQB : or PQB = PCB; donc BAR = PCB. Or les triangles BAR, CPB ayant deux angles égaux chacun à chacun, savoir BAR et PCB; ABR et PBC; les troisièmes le sont aussi; donc ARB = BPC; ainsi l'angle ARB est droit. Donc, etc.

Voici une seconde démonstration de la même proposition.
3. Soit O le point d'intersection des deux perpendiculaires AR, BQ; soit O (*) celui des perpendiculaires CP, AR : tout se réduit à prouver que OR = O'R. Or le triangle BQC étant semblable et au triangle BOR et au triangle ARC, ces deux derniers sont semblables, et donnent la proportion

$$BR : AR :: OR : CR,$$

d'où

$$BR \times CR = AR \times OR.$$

Des triangles semblables CO'R, ARB, on tire

$$BR : AR :: O'R : CR;$$

(*) On n'a pas placé le point O' dans la figure, parce qu'il est facile de se le représenter.

donc

$$BR \times CR = AR \times O'R\,;$$

ces deux égalités donnent $OR = O'R$. D'où il suit que les points O et O′ sont un seul et même point.

On sait (Géom. Liv. II, Prob. XV, Schol.) que les trois lignes qui divisent également chacun des trois angles d'un triangle, concourent en un même point, savoir au centre du cercle inscrit. Le centre du cercle circonscrit jouit aussi d'une propriété semblable; il est le point de concours des trois perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés.

Il existe entre ces deux propositions et celle que nous venons de démontrer, une filiation remarquable. Soit ABC le triangle donné, et soient a, b, c les milieux des côtés respectivement opposés aux angles A, B, C. Formons avec ces points le triangle abc, qui aura ses côtés parallèles à ceux du triangle ABC; donc les perpendiculaires élevées sur les milieux a, b, c des côtés du triangle ABC, deviendront des perpendiculaires abaissées des sommets a, b, c du triangle abc sur les côtés opposés. Si donc l'on veut démontrer primitivement que les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du grand triangle, concourent en un même point, on sera ramené à démontrer le concours des perpendiculaires abaissées des sommets du petit triangle sur les côtés opposés. Fig. 74.

Or avec les pieds a', b', c' de ces dernières, formons le triangle $a'b'c'$; sur les côtés ab, ac, bc, décrivons les demi-circonférences $ab'a'b$, $ac'a'c$, $bc'b'c$: elles passeront par les points b', a'; c', a'; b', c', (Géom., Liv. II, Prop. XVIII, Cor. II). Cela posé, les angles $aa'b'$ et abb' sont égaux; il en est de même des angles $aa'c'$, acc'. Mais les triangles abb', acc' ayant l'angle a commun et chacun un angle droit, il s'ensuit que l'angle $abb' = acc'$; donc aussi $aa'b' = aa'c'$. On prouverait de même que l'angle $bb'a' = bb'c'$, et $cc'a' = cc'b'$; donc les lignes aa', bb', cc' divisent en deux parties égales les angles du triangle $a'b'c'$, et conséquemment elles concourent en un même point. Donc, etc.

La difficulté serait donc réduite à faire voir que *les lignes qui divisent également les trois angles d'un triangle, se coupent en un seul point*, ce qui est démontré.

Remarquons que ce point, et ceux qui sont les concours des perpendiculaires élevées, des perpendiculaires abaissées, et des lignes menées des sommets des angles d'un triangle aux milieux des côtés opposés, sont confondus en un seul dans le triangle équilatéral. On s'assurera sans peine que, lorsqu'il s'agit d'un triangle isoscèle, tous ces points sont situés sur la hauteur de ce triangle.

Théorème IV. Mais, indépendamment de toute forme particulière du triangle, les trois derniers points mentionnés, c'est-à-dire, *le centre du cercle circonscrit*, *le point commun des trois hauteurs*, *celui des trois lignes menées de chacun des angles au milieu du côté opposé, sont toujours en ligne droite.*

5. Supposons que des sommets A et B on ait mené deux lignes quelconques AO, BM, intérieures au triangle; qu'on ait joint ces sommets avec les milieux G et H des côtés BC, AC; et qu'enfin, par G, H, on ait mené les lignes GF, HF respectivement parallèles à AO, BM, je dis que les trois points D, E, F seront en ligne droite.

En effet, les deux triangles BDI, HFK semblables à cause de HF parallèle à BM, et de GF parallèle à DI, donnent la proportion

$$DI : FK :: BI : HK.$$

Les deux triangles HKG, AIB semblables, parce que GH est parallèle à AB, et que GK l'est à AI, donnent

$$BI : HK :: AI : GK.$$

Ces deux proportions ayant un rapport commun, fournissent la suivante :

$$DI : FK :: AI : GK.$$

Des deux triangles AEI, EKG semblables, parce qu'ils ont tous les côtés parallèles, on déduit

AI : GK :: EI : EK.

Mais cette proportion et la précédente ayant encore le rapport commun AI : GK, donnent la suivante :

DI : FK :: EI : EK, ou DI : EI :: FK : EK.

L'angle FKE étant égal à l'angle EID, on peut conclure que les deux triangles EKF, EID sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; donc l'angle FEK = HED; donc FED est une ligne droite (*).

Qu'on suppose maintenant que les deux droites BM, AO deviennent perpendiculaires sur AC, BC; leurs parallèles HF, GF deviendront des perpendiculaires sur les milieux des côtés AC, BC; les lignes AG, BH ne varieront pas de position; mais alors la perpendiculaire menée du troisième sommet C sur le côté opposé AB, passera par le point de concours des deux autres; il en sera de même de la troisième perpendiculaire élevée sur le milieu de BC, par rapport aux deux autres, ainsi que de la ligne menée de C au milieu de AB; et, dans ces hypothèses particulières, les triangles employés précédemment, restant semblables, on aura les mêmes proportions et la même conclusion par rapport aux trois points de concours de ces nouveaux systèmes de lignes. Donc, etc.

Théorème V. *Si d'un point quelconque pris dans l'intérieur d'un triangle équilatéral, on mène des perpendiculaires sur les trois côtés, leur somme sera égale à la hauteur du triangle.*

Joignant le point O avec les points A, B, C, on a Fig. 76.

(*) J'ai résolu autrement cette question dans mes Élémens de Géométrie analytique.

$$surf.\ AOB = AB \times \tfrac{1}{2} RO$$

et $$surf.\ AOC = AC \times \tfrac{1}{2} QO,$$

$$surf.\ BOC = BC \times \tfrac{1}{2} PO.$$

Ajoutant ces trois égalités membre à membre, et observant que, par hypothèse, $AB = BC = CA$, il viendra

$$surf.\ ABC = BC \times \tfrac{1}{2}(RO + QO + PO):$$

or, on a d'autre part, $surf.\ ABC = BC \times \tfrac{1}{2} AH$; donc

$$RO + PO + QO = AH.$$

A cette occasion, nous nous proposerons la démonstration de cette propriété : *si des trois sommets d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois parties de ces perpendiculaires entre le point de concours et les sommets, valent en somme les diamètres des cercles inscrit et circonscrit.*

Fig. 71. Théorème VI. *Si dans le triangle ADC, on joint le sommet D avec le milieu E de AC, et qu'on divise DE en deux parties égales en I, la droite AIR donnera*

$$DR = \tfrac{1}{3} DC, \text{ d'où } CR = \tfrac{2}{3} DC = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{CB}{2} = \frac{CB}{3},$$

Ce théorème n'étant qu'un cas particulier du suivant, nous en laisserons la démonstration directe à rechercher.

Fig. 70. Théorème VII. *Si par un point quelconque O de la droite BE menée du sommet B au milieu de la base AC, on tire la droite COF, et que par F on mène à AC la parallèle FD, les trois points A, O, D sont en ligne droite.*

Pour le prouver, menons Ff, Dd parallèles à BE, et on aura par suite de la construction, $Ef = Ed$, à cause de $FL = LD$; donc $Af = Cd$. Or puisque la ligne COF est droite, on a

$$Cf : Ff :: CE : EO;$$

en supposant que la droite AD coupe BE en un point x

différent de O, on a, en outre

$$Ad : Dd :: AE : Ex.$$

Mais les trois premiers termes de cette seconde proportion sont égaux aux trois premiers termes de la précédente; donc $Ex = EO$.

Maintenant posons $AE = m$, $AF = p$, $FB = q$, $EB = h$; les triangles semblables ABE, AFf donneront

$$Ff = \frac{ph}{p+q}, \quad Af = \frac{mp}{p+q},$$

et les triangles semblables FfC, OEC donneront

$$EO = \frac{ph}{p+2q}.$$

D'où il suit que si on a $EO = OB = \frac{1}{2} h$, ce qui est l'hypothèse précédente, on trouvera

$$\frac{h}{2} = \frac{ph}{p+2q};$$

donc $p = 2q$, ou $AF = 2FB$, et par suite, $CD = 2DB$.

Problème IV. *Etant données deux parallèles FG, AL, on propose de mener par B une ligne BA, telle que la différence EA — BE soit égale à une ligne donnée.* Fig.

Par le point B je mène la droite BK sous une position arbitraire, et je prends $CI = BC$; par I je mène IH parallèle à AL : d'un point O quelconque et d'un rayon égal à la ligne donnée, je décris un cercle; je mène le rayon OM, puis BA parallèle à OM, ensorte que BA sera la ligne demandée. En effet, PI parallèle à EC donne

$$BC : CI :: BE : EP;$$

or $BC = CI$, donc $BE = EP$, $EA - BE = EA - EP = PA = OM =$ la ligne donnée.

Si le point B est d'une position telle, que le point I tombe en K, alors la ligne AP est nulle et la question est impossible, puisqu'alors BE = EA.

Si le point B est en B′, de sorte qu'ayant pris CI′ = CB′, la parallèle I′H′ laisse le cercle de OM au-dessous d'elle, on a

$$E'A' - E'B' = E'A' - E'P' = P'A' > OM,$$

et alors la question est encore impossible.

Remarque.

On observera qu'il serait plus simple de mener la ligne BK ou BO perpendiculairement aux parallèles, et de décrire de O, comme centre, une demi-circonférence avec la différence donnée.

Problème V. *On donne deux lignes AB, CD qui se rapprochent, mais qu'on ne peut prolonger jusqu'à leur concours, et on propose de diviser également l'angle que doivent faire ces deux lignes à leur point de rencontre.*

Joignant deux points quelconques A et C de ces lignes, on divisera également les angles BAC, DCA par les lignes
Fig. 78. AO, CO qui se couperont au centre du cercle inscrit au triangle, ensorte que comme les perpendiculaires OF sur CD et OG sur AB sont égales, le point O sera l'un des points de la droite cherchée : pour en avoir un second point, par les droites HO′, IO′, on mènera une transversale quelconque HI, puis divisant les angles BHI, DIH également, on mènera la droite OO′ qui résout la question.

Fig. 79. *Autre solution.* On peut par A mener une parallèle AM à CD, diviser l'angle KAM en deux parties égales par la droite AC, et élever sur le milieu de AC une perpendiculaire qui résoudra la question.

Problème VI. *Étant donnés la base AB d'un triangle, sa hauteur AC et le rectangle AC × AE des deux autres côtés, construire ce triangle.* Fig. 80.

Ayant disposé les droites AB, AC à angle droit, on élevera sur le milieu D de AB, une perpendiculaire que l'on coupera en quelque point G, de manière que $AG = AF = \frac{1}{2} AE$. Puis, du point G, comme centre, et avec AG comme rayon, on décrira un cercle AMBKI; enfin, par le point C menant la ligne CIK parallèle à AB, et joignant l'un des points d'intersection avec A et B, on formera, par exemple, le triangle IAB qui est celui qu'on cherche. Car d'abord il a la hauteur requise, puisque la perpendiculaire IL abaissée du point I sur AB, est égale à AC; en second lieu, menons le diamètre IGM et joignons MB : les triangles semblables IAL, IMB donnent

$$IL : IA :: IB : IM, \text{ d'où } IA \times IB = IL \times IM = AC \times AE;$$

On observera qu'on peut toujours changer le rectangle donné des deux autres côtés dans celui de la hauteur par une autre ligne.

Problème VII. *Étant donnés la base, la hauteur et le rapport de deux autres côtés d'un triangle, construire ce triangle.* Fig. 81.

Soient BD la base, H la hauteur données, et supposons que les deux autres côtés du triangle cherché, soient entre eux :: S : R. Divisons BD au point E, de manière que l'on ait BE : ED :: S : R, et par ce même point E menons une perpendiculaire à BD. Ayant fait EH = H, prenons $EI = \frac{BE \times ED}{EH}$; par le point C milieu de BD, menons ACM parallèle à HI, et sur EI comme diamètre, décrivons un demi-cercle ELMI qui coupera ou qui touchera la droite AM. Enfin par un des points d'intersection M, ou par le point de contact, et par le point E, menons une droite qui coupe en N la parallèle FG à BD menée par le point H; je dis que NBD sera le

triangle cherché. Car les triangles semblables NHE, IME donnent

NE : IE :: HE : EM, ou $NE \times EM = IE \times HE = BE \times ED$;

donc (Récip. Liv. III, Prop. XX) les quatre points B, N, D, M, sont sur une même circonférence dont le centre est sur AM; donc l'arc BM = MD, et conséquemment l'angle BNE = END; donc (Géom. Liv. III, Prop. XVII) BN : ND :: BE : ED :: S : R. De plus, la hauteur NO du triangle BND est égale à EH, c'est-à-dire à H.

On voit quelle restriction il faut mettre à l'énoncé, pour que ce problème soit possible.

Problème VIII. *Étant données la base, la hauteur et la somme des deux autres côtés d'un triangle, construire ce triangle.*

Fig. 82. Soient BD, DF et BE la base, la hauteur et la somme données; du point B pris pour centre et d'un rayon égal à BE, décrivons un arc indéfini HEZ. Sur le prolongement de DF, perpendiculaire à BD, prenons FG = FD, et par les points D et G faisons passer un cercle tangent au cercle HEZ (*); le centre A de ce cercle se trouvera nécessairement sur la perpendiculaire FA à DG élevée au point F, et le triangle ABD sera celui que l'on demande. Car (Géom. Liv. II, Prop. XIV, Cor.), la ligne BAH = BE étant droite, on a AB + AD = BE. D'ailleurs la hauteur AC = DF.

Problème IX. *Étant données la base, la hauteur et la différence des deux autres côtés d'un triangle, construire ce triangle.*

Fig. 83. Soient BD, DF, BE la base, la hauteur et la différence données. DF étant perpendiculaire à BD, on prendra sur son prolongement FG = DF. Par les points D et G, on fera passer

(*) On trouvera plus loin la solution de ce problème.

un cercle tangent à celui qui a pour rayon BE; et si A est le centre de ce cercle, ABD sera le triangle demandé.

Problème X. *Étant donnés la base, la hauteur et l'angle du sommet d'un triangle, construire ce triangle.*

Soient AC la base donnée, CF la hauteur donnée, et Z l'angle du sommet du triangle cherché. Au point A, faisons l'angle BAC complément de l'angle Z; par les trois points A, B, C faisons passer un cercle, et par le point F extrémité de la hauteur CF perpendiculaire à AC, menons FG parallèle à AC; joignant GA et GC, GAC sera le triangle requis. On examinera les deux cas de l'angle Z droit et obtus. Fig. 8

Problème XI. *Étant donnés la base, l'angle opposé et la somme des deux autres côtés d'un triangle, construire ce triangle.*

Soient AB la base donnée et PQ la somme des deux autres côtés; soit Z l'angle donné. On décrira sur AB un ségment AMB capable de l'angle Z; du point M milieu de l'arc AMB, comme centre, et avec un rayon égal à MA, on décrira un cercle que l'on coupera en K par un arc décrit du point B comme centre, avec un rayon = PQ : enfin on joindra KB qui rencontre en C l'arc AMB, et CAB sera le triangle requis. En effet (Récip. Liv. II, Prop. IX), l'angle ACB ayant pour mesure l'arc AEB, est double de l'angle AKB; donc le triangle CKA est isoscèle et donne CK = AC : de plus, en vertu de notre construction, l'angle ACB = Z. Fig. 8

Nous observerons que, dans le cercle AEBK'K, la plus grande corde étant le diamètre BK', le périmètre du triangle isoscèle BMA, sera toujours plus grand que celui de tout autre triangle BCA, et qu'il sera un *maximum* absolu entre les contours des triangles construits d'après l'énoncé.

On pourra s'exercer à résoudre cette question qui a de l'analogie avec la précédente : *Étant donnés la base, l'angle*

opposé et la différence des deux autres côtés d'un triangle, construire ce triangle.

Fig. 86. Problême XII. *Étant données les longueurs des trois lignes AM, BM', CM" menées des sommets des trois angles d'un triangle aux milieux des côtés opposés, construire le triangle.*

Par le point A menons AD, AE respectivement parallèles aux droites BM', CM"; à cause des triangles semblables BOM, DAM; COM, EAM et de $MO = \frac{1}{2} AO$, on aura (p. 76, Cor.)

$$DB = BC = CE;$$

et les triangles semblables ADC, M'BC; ABE, M"BC donneront

$$AD = 2BM', \quad AE = 2CM''.$$

Ainsi, dans le parallélogramme DAEF dont les côtés AD, AE sont doubles de BM', CM", la diagonale AF sera double de AM (Géom. Liv. I, Prop. XXXII). Si donc on construit un triangle ADF dont les côtés soient doubles des trois lignes données, et qu'ayant achevé le parallélogramme ADFE, on divise DE en trois parties égales DB, BC, CE, le triangle BAC sera celui qu'on cherche.

Théorème VIII. Nous placerons ici une démonstration tout-à-fait neuve de la proposition du *quarré de l'hypoténuse :* elle a sur toutes celles dont on est en possession, l'avantage de n'exiger que la connaissance des principes du premier livre de la Géométrie.

Fig. 87. Soit ABC un triangle rectangle en A : sur les trois côtés de ce triangle, construisons les trois quarrés BCMN, ACDE et AHIB : par les points B et C, menons BP, CP parallèles aux côtés AC, AB; ces lignes seront les prolongemens des côtés BI et CD, et le triangle BPC ainsi construit, sera égal au triangle ABC. Des points M et N, abaissons sur les prolongemens de CP et BP, les perpendiculaires MQR, NRS : on formera de cette manière, trois triangles QMC, RNM, SBN

égaux chacun au triangle PCB, et le quarré BCMN de l'hypoténuse se composera de ces quatre triangles et du quarré PQRS. Prenons d'abord AF = AH = AB, et achevons le quarré AFGH, puis CK = AB, et par le point K menons KL parallèle à AE; enfin prolongeons GF jusqu'à la rencontre de KL en O, et joignons KD, KG. La figure HCDEFG qui est la somme des quarrés formés sur les côtés AB, AC, sera aussi décomposée dans les quatre triangles HGK, GKO, KLD, KCD égaux au triangle ABC, et dans le quarré EFOL qui est égal au quarré PQRS, puisqu'ils ont l'un et l'autre pour côté AC — AB. Donc le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés.

Remarques.

On peut parvenir à la même conclusion, par la construction que nous avons faite dans le quarré BCMN, en supposant la mesure des surfaces. Car la surface du triangle CPB étant $\frac{CP \times BP}{2} = \frac{CP \times AC}{2} = \frac{AB \times AC}{2}$, et celle du quarré PQRS étant égale à $(AC - AB)^2$, la surface totale du quarré BCMN sera

$$2AB \times AC + (AC - AB)^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2.$$

Lorsque le triangle rectangle ABC est isoscèle, le quarré PQRS est nul; ainsi *l'aire du quarré fait sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle isoscèle, est quadruple de celle de ce triangle.*

Théorème IX. *Les deux lignes BF, CE, ainsi que la perpendiculaire AD abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC, sur l'hypoténuse BC, se coupent en un seul point O.* Fi

AF, AE sont deux quarrés construits sur les côtés AC, AB de l'angle droit. Soit O le point d'intersection de CE avec AD; je dis que BF coupera la perpendiculaire AD au même

point. Car si elle la coupait en O′, à cause de FH perpendiculaire sur BC, on aurait la proportion

$$BH : FH :: BD : DO';$$

mais le triangle FCH est égal à ADC, parce que l'angle CFH = BAD = ACD. Il en est de même des triangles ABD, EBG, EG étant perpendiculaire sur BC : on a donc

$$CH = AD,\ FH = CD,\ GB = AD,\ EG = BD.$$

Mettant donc pour BH et FH leurs valeurs dans la proportion précédente, on aura

$$BC + AD : CD :: BD : DO'.$$

Les deux triangles EGC et ODC donnent aussi la proportion

$$CG : CD :: GE : DO;$$

laquelle, en substituant à CG et GE leurs valeurs trouvées précédemment, devient

$$CB + AD : CD :: BD : DO.$$

On a donc DO′ = DO. Donc, etc.

Théorème X. *Démontrer les deux formules*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \mp 2AB \times AD.$$

Fig. 89. Sur les trois côtés du triangle ABC, je forme des quarrés, et de chacun des angles A, B et C, je mène des perpendiculaires sur les côtés opposés, prolongées jusqu'en M, Q et P : on sait que ces perpendiculaires se coupent en un point R. Les deux triangles ABE, KBC étant égaux, les rectangles BIME, KBDP dont ils sont les moitiés, seront aussi égaux; il en sera de même des rectangles IMFC, GQOC. Le quarré construit sur BC est donc égal aux deux rectan-

gles BP, CQ; mais ces deux rectangles valent la somme des quarrés faits sur BA, CA, moins celle des rectangles DP', OQ'. Il reste à faire voir que $DP' + OQ' = 2AB \times AD$, ou seulement que $DP' = OQ'$, puisque $DP = AB \times AD$. Or les triangles semblables AOB, ADC donnent la proportion

$$AD : AO :: AC : AB,$$

d'où $AD \times AB = AO \times AC$, ou $DP' = OQ'$.

Il ne sera pas difficile de prouver le second cas de la proposition. Cette démonstration a l'avantage de ressembler à celle qu'a donnée l'auteur, dans le cas du triangle rectangle.

Remarque.

Lorsqu'il sera question de la pyramide triangulaire, nous démontrerons sur le quarré de l'aire de la face opposée à l'angle trièdre droit, comparé aux quarrés des aires des trois autres faces, un théorème analogue au quarré de l'hypoténuse.

Problème XIII. *Élever une perpendiculaire à l'extrémité A d'une droite AB qu'on ne peut prolonger.*

Du point A on prendra sur AB quatre parties égales; du point B comme centre avec cinq de ces divisions comme rayon, on décrira un arc qu'on coupera en C par un autre arc décrit de A comme centre avec trois des mêmes parties. La ligne AC sera la perpendiculaire cherchée.

Théorème XI. *Si des deux centres A et B, et avec les rayons AP, AQ, on décrit des arcs qui se coupent en P et* p, *Q et* q, 1° *les points Q, P,* p, q *sont en ligne droite;* 2°. *les droites AB et P*p*; AB et Q*q *se couperont à angles droits en deux parties égales au point M, et les parties QP,* qp *seront égales.*

1°. Tous les côtés des triangles AP*p*, BP*p* étant égaux entre eux par construction, l'angle AP*p* sera égal à l'angle BP*p*; on aura de même l'angle APQ égal à l'angle BPQ; donc

$$APp + APQ = BPp + BPQ:$$

mais la somme de ces quatre angles est égale à quatre angles droits, puisqu'elle est égale à celle des angles des triangles APQ, BPQ; donc

$$APp + APQ = 2 \text{ angl. droits} = BPp + BPQ;$$

donc la ligne QPp est droite. On démontrera de la même manière que la ligne Ppq est droite. Donc, etc.

2°. A cause de l'égalité des côtés des deux triangles APB, ApB, on a l'angle PAB égal à l'angle pAB; mais on a encore l'angle APp égal à l'angle ApP; donc aussi l'angle AMP est égal à l'angle AMp; donc ces deux angles sont droits, et la ligne Pp sera partagée en deux parties égales en M. On démontrera de la même manière que la droite Qq est divisée également en M par AB. Donc si de QM $=$ qM, on retranche PM $=$ pM, il restera QP $=$ qp. Donc, etc.

Corollaire. On aura donc $\overline{QM}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{AM}^2$.

Théorème XII. *On a* $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 + Pp \times PQ$.

Car $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 + 2MP.PQ$; mais on a $2MP = Pp$.
Fig. 91. Donc, etc.

Théorème XIII. *On a* $\overline{AQ}^2 = \overline{Ap}^2 + \overline{pQ}^2 - Pp \times pQ$.

Car $\overline{AQ}^2 = \overline{Ap}^2 + \overline{pQ}^2 - 2pM \times pQ$; mais $2pM = Pp$; donc, etc.

Fig. 91. *Corollaire.* Puisque $pQ = pP + PQ$, on aura

$$\overline{pQ}^2 = pP \times pQ + PQ \times pQ;$$

d'où

$$\overline{pQ}^2 - pP \times pQ = PQ \times pQ.$$

Substituant cette valeur dans celle de AQ qu'on vient de trouver, on obtiendra

$$\overline{AQ}^2 = \overline{Ap}^2 + PQ \times pQ, \text{ d'où } \overline{AQ}^2 - \overline{Ap}^2 = PQ \times pQ,$$

et de là on déduit cette proportion

$$pQ : AQ + Ap :: AQ - AP : PQ;$$

et après la substitution de AP pour Ap, et la transposition des extrêmes, on a cette autre proportion

$$PQ : AQ + AP :: AQ - AP : pQ.$$

On a donc cette propriété connue :

Dans un triangle quelconque, un côté quelconque est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces côtés, est à la différence ou à la somme des segmens que fait sur ce côté la perpendiculaire menée de l'angle opposé, suivant qu'elle tombe en dedans ou en dehors du triangle.

Problème XIV. *Dans un triangle équilatéral, inscrire un hexagone régulier.*

On divisera la base AB du triangle ABC en trois parties égales, aux points c et d; des centres c et d et du rayon cd on décrira deux arcs qui se couperont dans l'intérieur du triangle en un point O; du même rayon et de ce point O pris pour centre, on décrira une circonférence qui coupera chacun des trois côtés du triangle équilatéral en deux points. Ces six intersections seront les six sommets de l'hexagone.

Les élèves trouveront facilement la raison de cette construction qui se fait au moyen du compas seulement.

Les deux théorèmes suivans dus à M. *Carnot, membre de l'Institut national*, nous ramèneront à quelques propriétés déjà démontrées : nous devons prévenir le lecteur, qu'ils exigent l'emploi des lignes trigonométriques.

Théorème XIV. *Si les trois côtés d'un triangle ou leurs prolongemens sont coupés par une transversale quelconque indéfinie, il y aura sur la direction de chacun des côtés du triangle, deux segmens formés par la transversale, et tels que le produit de trois d'entre eux, n'ayant aucune extrémité commune, est toujours égal au produit des trois autres:*

Les segmens des côtés du triangle ABC, formés par la transversale ab, c'est-à-dire, les deux portions comprises entre
Fig. 92. cette transversale et les sommets des angles placés sur la direction du côté qu'elle coupe, sont

$$Ac,\ Bc \text{ sur } AB;\ Ab,\ Cb \text{ sur } AC;\ aB,\ aC \text{ sur } BC.$$

On a donc, d'après l'énoncé,

$$Ab \,.\, Ca \,.\, Bc = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

Par le sommet B, par exemple, menons une parallèle à AC, qui rencontre en k la transversale ab; les triangles semblables Abc, Bkc; Cab, Bak donnent les proportions suivantes :

$$Ab : Ac :: Bk : Bc \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$Ca : Cb :: Ba : Bk \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si on les multiplie par ordre, et qu'on établisse l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, on trouve la relation énoncée qui suppose essentiellement les trois points a, c, b en ligne droite. La démonstration a lieu, soit que la transversale coupe l'aire, ou que, comme $a'c'b'$, elle passe au dehors.

Remarque I.

Lorsque la transversale passant toujours par b, devient parallèle à BC, les proportions (1) et (2) se changent dans les suivantes :

$$Ab : Ac :: Cb : Bc;$$
$$\infty : Cb :: \infty : Cb,$$

dont le résultat est la propriété connue

$$Ab : Ac :: Cb : Bc.$$

Théorème XV. *Si par un point quelconque pris dans le plan d'un triangle, on mène sur chacun des côtés une transversale*

qui passe par l'angle opposé, on obtiendra sur chacun de ces côtés deux segmens, tels que le produit de trois d'entre eux n'ayant aucune extrémité commune, sera égal au produit des trois autres.

Il s'agit donc de prouver qu'on a

$$Ab \,.\, Ca \,.\, Bc = Ac \,.\, Ba \,.\, Cb \ldots\ldots (B)$$

Ab, Bc, Ca, ainsi que Ac, Ba, Cb, étant des segmens non Fig. 93. contigus, ou qui n'ont point d'extrémités communes.

Les deux triangles AaB, AaC coupés, le premier par la transversale Cc, le second par la transversale Bb, donneront, d'après le théorème précédent,

$$AD \,.\, Bc \,.\, Ca = Ac \,.\, BC \,.\, aD,$$
$$aD \,.\, BC \,.\, Ab = AD \,.\, Ba \,.\, Cb;$$

multipliant ces deux égalités membre à membre, et supprimant les facteurs communs, on trouve la propriété annoncée.

Remarque.

Cette proposition a lieu soit que le point D soit pris dans l'intérieur du triangle, soit qu'il soit pris au dehors.

Coroll. I. Si les trois lignes menées des sommets de chacun des angles, sont perpendiculaires sur les côtés opposés, on a

$$\left.\begin{array}{l} Ab : \cos BAC :: AB : 1 \\ Bc : \cos ABC :: BC : 1 \\ Ca : \cos ACB :: AC : 1 \\ Ac : \cos BAC :: AC : 1 \\ Ba : \cos ABC :: AB : 1 \\ Cb : \cos ACB :: BC : 1 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} Ab = AB \,.\, \cos BAC \\ Bc = BC \,.\, \cos ABC \\ Ca = AC \,.\, \cos ACB \\ Ac = AC \,.\, \cos BAC \\ Ba = AB \,.\, \cos ABC \\ Cb = BC \,.\, \cos ACB, \end{array}\right.$$

et substituant ces valeurs dans la relation (B), on trouve,

après avoir supprimé les facteurs communs, cette égalité parfaite

$$AB . AC . BC = AB . AC . BC.$$

Donc ces trois perpendiculaires se coupent en un seul point.

Corollaire II. Si les lignes menées des sommets divisent les angles en deux parties égales, on a les valeurs

Fig. 93.

$$Ab = \frac{Bb . \sin\frac{1}{2}B}{\sin A}, \quad Bc = \frac{Cc . \sin\frac{1}{2}C}{\sin B}, \quad Ca = \frac{Aa . \sin\frac{1}{2}A}{\sin C},$$

$$Ac = \frac{Cc . \sin\frac{1}{2}C}{\sin A}, \quad Ba = \frac{Aa . \sin\frac{1}{2}A}{\sin B}, \quad Cb = \frac{Bb . \sin\frac{1}{2}B}{\sin C}.$$

dont la substitution dans (*B*) donne cette égalité identique

$$Aa . Bb . Cc = Aa . Bb . Cc.$$

Donc les lignes qui divisent également chacun des angles d'un triangle, se coupent en un seul point.

Il est facile de conclure de la relation (*B*), que les lignes qui, menées de chacun des angles, divisent les côtés opposés en deux parties égales, se coupent aussi en un point unique.

Division des Triangles.

Problème XV. *Diviser un triangle en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné* 1°. *par une ligne partant du sommet;* 2°. *par une ligne parallèle à l'un des côtés.*

1°. Si ce rapport est celui de m à n, et que la base du triangle soit b, en désignant le segment par x, on aura

$$m : n :: x : b - x, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{mb}{m+n}.$$

Si on voulait partager le triangle en trois parties qui fussent entre elles :: $m : n : p$, on aurait, en désignant l'un des

segmens de la base par x, le second par y,

$$x = \frac{mb}{m+n+p},\ y = \frac{nb}{m+n+p}.$$

2°. Les deux triangles ABC, DBE semblables donnent Fig. 94.

$$\text{surf. ABC} : \text{surf. DBE} :: m : n :: \overline{BA}^2 : \overline{BD}^2;$$

d'où l'on déduit

$$BD = BA \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

S'il s'agissait de diviser le triangle ABC en cinq parties équi- Fig. 95.
valentes en surface, par des parallèles à AC, on aurait

$$Bb = AB\sqrt{\tfrac{1}{5}},\ Bb' = AB\sqrt{\tfrac{2}{5}},\ Bb'' = AB\sqrt{\tfrac{3}{5}},\ Bb''' = AB\sqrt{\tfrac{4}{5}}.$$

Problème XVI. *Partager un triangle ABC en trois parties équivalentes, 1° par des lignes qui partent d'un point donné sur un des côtés; 2° par un point donné dans l'intérieur du triangle.*

1°. Soit D le point de départ des lignes de division De, De'; les bases AD, DC étant connues, on aura les hauteurs ek, $e'k'$, en divisant le tiers de la surface ABC successivement par $\frac{1}{2}$AD et par $\frac{1}{2}$DC; ensorte qu'en portant ces longueurs, à partir de H, sur la perpendiculaire HB à AC, et menant par chacune des extrémités des parallèles à AC, leurs rencontres avec les côtés BA et BC, donneront les points e et e'. Fig. 96, 97.

Mais si, par exemple, $\dfrac{\frac{1}{3}\text{ surf. ABC}}{\frac{1}{2}\text{ DC}} > \text{BH}$, on sera averti par là que le côté De' (fig. 96) ne peut rencontrer CB que dans le prolongement de CB, solution qui doit être rejetée : il faut alors rechercher si le point ne peut pas être situé sur AB en e'' (fig. 97). On aurait dans cette supposition,

$$\text{surf. AD}e'' = \tfrac{2}{3}\text{ surf. ABC},$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\text{AD} . e''k'' = \tfrac{1}{3}\text{AC} . \text{BH};$$

d'où l'on conclut

$$e''k'' = \frac{2}{3}\,\frac{AC}{AD}\,.\,BH.$$

Il suffit donc, pour que l'hypothèse ait lieu, qu'on ait

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{AC}{AD} < 1, \quad \text{d'où} \quad AD > \frac{2}{3}\,AC \quad \text{et} \quad DC < \frac{1}{3}\,AC.$$

On peut encore résoudre cette question par le principe de
Fig. 98. la transformation des figures. En effet, si l'on partage AC en trois parties égales, en F et F′, et que par ces points, on mène les parallèles Fe, F′e' à la ligne BD qui joint le sommet B avec le point donné D, les droites eD, e'D diviseront le triangle proposé en trois parties équivalentes; car le triangle AeD = ABF = $\frac{1}{3}$ ABC ; de même le triangle Ce'D = CBF′ = $\frac{1}{3}$ ABC. Il est visible ici que la ligne F′e' ne peut rencontrer le côté BC qu'autant qu'on a AD < $\frac{2}{3}$ AC, et que pour AD > $\frac{2}{3}$ AC, cette construction n'a pas lieu.

Ce problème trouve son application lorsqu'on veut pratiquer des sentiers De, De' qui aboutissent à un puits commun D.

2°. Supposons que le point D soit donné dans l'intérieur du
Fig. 99. triangle par la perpendiculaire Df, abaissée de D sur AC, et par la distance fA, et prenons la droite Df pour une ligne de division; faisons

$$Af = a, \quad Df = b, \quad Ag' = x, \quad f'g' = y.$$
$$AH = c, \quad BH = d, \quad \text{surf. } ABC = 3m^2.$$

Les triangles semblables ABH, A$f'g'$ donnent

$$dx = cy.$$

De plus, l'aire du trapèze $f'g'f$D est $\frac{y+b}{2}(a-x)$, celle du triangle A$f'g'$ est $\frac{xy}{2}$; et comme l'aire du quadrilatère Af'Df $= \frac{\text{surf. ABC}}{3} = m^2$, on a l'équation

$$m^2 = \frac{y+b}{2}(a-x) + \frac{xy}{2} = \frac{y+b}{2}\cdot a - \frac{bx}{2};$$

Substituant dans cette équation pour y sa valeur $\frac{dx}{c}$, il vient

$$x = \frac{(2m^2 - ab)c}{ad - bc}.$$

Pour que le point f' soit sur AB, il faut que x soit $< c$, ou, en d'autres termes, qu'on ait $ad - bc > 2m^2 - ab$. Nous laissons au lecteur à discuter les différens cas qui peuvent se présenter.

Problème XVII. *Étant donné un triangle ABC, trouver dans sa surface un point F, tel que les lignes tirées de ce point aux trois angles partagent le triangle en trois parties équivalentes.* Fig. 100.

Après avoir pris BD $= \frac{1}{3}$ BC, on tirera la ligne DE parallèle à BA; et du point F, milieu de DE, menant FA, FB, FC, le triangle BAC sera divisé suivant la condition énoncée.

Les deux triangles AFB, ADB ont même base et même hauteur; donc

$$\text{surf. AFB} = \text{surf. ADB} = \tfrac{1}{3}\ \text{surf. BAC}.$$

Par construction, DF = FE; donc

$$\text{surf. CFE} = \text{surf. CFD};$$

d'un autre côté on a

$$\text{surf. AFE} = \text{surf. BFD}.$$

Ajoutant ces deux équations membre à membre, on trouve

$$\text{surf. CFA} = \text{surf. CFB} = \tfrac{1}{3}\ \text{surf. ABC}.$$

Problème XVIII. *Partager un triangle en deux parties proportionnelles par une ligne EF perpendiculaire à la base.* Fig. 101.

Après avoir abaissé la hauteur CD du triangle, posons

$$AE = x,\quad EF = y,\quad AD = a,\quad AB = b,\quad CD = h:$$

l'aire du triangle ACB est $\frac{bh}{2} = s$, et parce que

$$\text{surf. AEF} : \text{EFCB} : m : n;$$

on a

$$\text{surf. AEF} = \frac{xy}{2} = \frac{ms}{m+n};$$

de plus, les triangles ACD, AFE donnent

$$a : h :: x : y, \text{ d'où } y = \frac{hx}{a};$$

substituant cette valeur pour y, on obtient

$$x^2 = \frac{m}{m+n} ab.$$

On remarquera que ab est la surface du triangle qui aurait AB pour base et AD pour hauteur.

Problème XIX. *Partager un triangle par une droite minimum, en deux parties qui soient entre elles dans un rapport donné.*

Fig. 102. Représentons par x la droite DE *minimum*, par A, B, C les angles du triangle, et par a, b, c les côtés opposés à ces angles : on doit avoir

$$\text{surf. ABC} : \text{surf. DBE} :: n : 1.$$

Si du point B on abaisse sur DE la perpendiculaire BH, et que l'on nomme α l'angle DBH, l'angle D sera égal à $100^d - \alpha$, et l'angle E égal à $100^d - B + \alpha$, en supposant le quart de circonférence divisé en 100 parties. D'un autre côté, l'aire du triangle DBE est $= \frac{x.\text{BH}}{2}$. Mais on a

$$\text{BH} : \text{BD} :: \sin(100° - \alpha) : 1, \text{ d'où } \text{BH} = \text{BD} \sin(100° - \alpha),$$

$$\text{BD} : \text{DE} :: \sin(100° - \text{B} + \alpha) : \sin\text{B}, \text{ d'où } \text{BD} = x \frac{\sin(100° - \text{B} + \alpha)}{\sin \text{B}}.$$

Donc (Théor. XIX, Lemme.),

$$\text{surf. DBE} = \frac{x^2}{2}\,\frac{\sin(100^\circ - \alpha)\times\sin(100^\circ - B + \alpha)}{\sin B}$$

$$= \frac{x^2}{2}\,\frac{\cos\alpha\cos(B-\alpha)}{\sin B};$$

d'ailleurs la surface du triangle ABC $= \frac{ac}{2}\sin B$; donc on a, d'après l'énoncé du problème,

$$\text{surf. DBE} = \frac{1}{n}\,\frac{ac}{2}\sin B.$$

De ces deux valeurs, on déduit

$$x^2 = \frac{ac\sin^2 B}{n\cos\alpha\cos(B-\alpha)} = \frac{1}{n}\,\frac{ac\sin^2 B}{\left\{\frac{1}{2}\cos(B-2\alpha)+\frac{1}{2}\cos B\right\}}\ (*).$$

Or la plus petite valeur de x correspond à la plus grande valeur du dénominateur, ou du facteur $\cos(2\alpha - B)$, puisque n, a, c, $\sin B$ et $\cos B$ sont donnés : mais le *maximum* de $\cos(2\alpha - B)$ est donné par $2\alpha = B$, d'où $\alpha = \frac{B}{2}$; ainsi la ligne DE qui opère la division, doit être perpendiculaire à celle qui divise l'angle B en deux angles égaux. Ce problème est un de ceux énoncés dans le n° 8 *de la Correspondance sur l'École Polytechnique*.

Nous laissons à chercher la solution de cette question : *Diviser un triangle scalène en quatre surfaces équivalentes, par deux lignes perpendiculaires entre elles.*

(*) $\cos\alpha\cos(B-\alpha) = \cos B\cos^2\alpha + \sin B\sin\alpha\cos\alpha$; mais $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, d'où $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$; donc

$$\cos\alpha\cos(B-\alpha) = \frac{1}{2}\cos B + \frac{\cos B\cos 2\alpha + \sin B\sin 2\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos B + \frac{1}{2}\cos(B-2\alpha).$$

Sur les figures à quatre côtés.

Théorème XVI. *Si l'on joint deux à deux les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, la figure résultante sera un parallélogramme.*

Fig. 103. Soit le quadrilatère ABCD, et soient m, n, p, q les milieux des quatre cotés; menons les diagonales AC, DB; les côtés BA, BC étant divisés également en m et n, la ligne mn sera parallèle à AC, il en sera de même de qp; par la même raison, qm et pn seront parallèles à DB: donc la figure $mnqp$ est un parallélogramme.

La même propriété aurait encore lieu dans le cas où le quadrilatère aurait un angle rentrant.

Théorème XVII. *Soit EFGH un quarré inscrit, inscrivons dans ce quarré le quarré IKLM; dans ce dernier inscrivons de même le quarré PQRS, et ainsi de suite; je dis que la limite de la somme de tous ces quarrés, est le quarré circonscrit ABCD.*

Fig. 104. En effet, nommons S', S'', S''', etc. les surfaces de ces quarrés, en prenant pour unité le rayon du cercle circonscrit, on aura $S' = 2$, $S'' = 1$, $S''' = \frac{1}{2}$; $S^{\text{IV}} = \frac{1}{4}$, etc. Or, d'après les règles de l'algèbre, la limite de la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ etc. est 1; donc $S' + S'' + S'''$ etc. $= 4$: or, ABCD $= 4$; donc ABCD $= S' + S'' + S''' +$ etc.

Problème XX. *Étant donnée la différence AG entre la diagonale et le côté d'un quarré, construire ce quarré.*

Fig. 105. Au point A je fais l'angle GAD égal à la moitié d'un droit; au point G, je mène la ligne GHFE perpendiculaire à AD et par un point quelconque F de cette ligne, je mène FM parallèle à AC, et je prends FM $=$ GF; je joins les points G et M par la droite GM que je prolonge jusqu'en D; par D je mène DC, DE parallèles à GE, CG, et je dis que CD est le côté du quarré. Car, à cause de FM $=$ GF, on a

$$DE = GE = CG = DC:$$

or CG $=$ DA; donc CD $=$ DA.

Théorème XVIII. *Soit un quadrilatère ABCD; si on en prolonge les côtés AB, DC; AD, BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F et G, on aura un autre quadrilatère ABFCGDA ayant les trois diagonales AC, BD, FG qui se coupent deux à deux, savoir BD, AC en* l*; BD, FG en* k*; AC, FG en* h *; et chacune de ces diagonales est coupée par les deux autres en segmens proportionnels.* Fig. 106.

Considérons d'abord le triangle ABC : ce triangle étant coupé par trois transversales DA, DB, DC partant d'un même point D pris dans son plan, et passant par ses trois angles, on aura (Théor. XV, Rem.),

$$Al \,.\, CG \,.\, BF = AF \,.\, BG \,.\, Cl \; (*).$$

D'un autre côté, ce même triangle coupé par la transversale kFG qui ne passe par aucun de ses angles, donne (Théor. XV)

$$AF \,.\, BG \,.\, Ch = Ah \,.\, CG \,.\, BF \; (*).$$

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, et supprimant les facteurs communs, on aura cette relation entre les segmens Al, Cl; Ah, Ch de la diagonale AC, compris entre les extrémités A et C, et ses points de rencontre l et h par les deux autres diagonales BD, FG,

$$Al : Cl :: Ak : Ch \ldots\ldots (A).$$

On obtiendra de même pour chacune des deux autres diagonales BD, FG, les proportions

$$Bl : Dl :: Bk : Dk \ldots\ldots (B).$$
$$Fk : Gk :: Fh : Gh \ldots\ldots (C).$$

(*) Pour déduire avec facilité toutes ces proportions de celles qui ont été trouvées (Théor. XV et XIV), on remarquera qu'en passant de la fig. 106 à la fig. 93, le point l est analogue à b, G à a, F à c, et qu'en passant de la fig. 106 à la fig. 92, le point F est analogue à c, G à a, h à b, et que, dans ces trois figures, les sommets des angles ont été notés par les mêmes lettres.

Corollaire I. Si par le point k on imagine une nouvelle transversale $kB'l'D'$ qui coupe AF, AG en B′ et D′, et qu'on mène GB′, FD′ qui se coupent en C′, puis par A et par C′ la ligne $AC'h'$ supposée différente de ACh, on aura les trois proportions

$$Al' : C'l' :: Ah' : C'h' \ldots\ldots (A')$$
$$B'l' : D'l' :: B'k : D'k \ldots\ldots (B')$$
$$Fk : Gk :: Fh' : Gh' \ldots\ldots (C').$$

Mais de (C′), on tire

$$Fk + Gk : Fk :: Fh' + Gh' : Fh',$$

c'est-à-dire,

$$Fk + Gk : Fk :: FG : Fh',$$

et de (C) on déduit

$$Fk + Gk : Fk :: FG : Fh;$$

donc $Fh' = Fh$. La droite Ah sera donc le lieu des points C, C′, etc. déterminés par le croisement des droites menées des points F et G aux points D et B, D′ et B′, etc. On reconnaîtra sans peine que le théorème I est compris dans celui-ci.

Corollaire II. Si dans un triangle AFG, on mène des points F et G deux droites quelconques FD, GB qui se coupent en C, puis la ligne ACh, puis des systèmes de droites FD′, GB′; FD″, GB″, etc. qui se croisent sur Ah, les transversales BD, B′D′, B″D″, etc. prolongées suffisamment, iront toutes se couper en un même point k du prolongement de GF. Nous invitons le lecteur à chercher une démonstration directe de cette propriété.

Problème XXI. *Etant données quatre droites telles, que la somme de trois quelconques d'entre elles, soit plus grande que la quatrième, construire un quadrilatère inscrit dont ces droites soient les côtés, sous la restriction que deux d'entre elles soient assignées comme côtés opposés.*

Désignons par A, B, C, D les quatre droites données, A et C, B et D devant être côtés opposés dans le quadrilatère demandé. Il y a plusieurs cas à distinguer.

1°. Si ces quatre droites sont toutes égales entre elles, la solution n'a pas de difficulté : elle se réduit à faire un quarré dont une de ces lignes soit le côté.

2°. Si $A = C$ et $B = D$, le rectangle construit sur A et B sera le quadrilatère inscrit demandé.

3°. Soit toujours $A = C$, mais $B > D$, PQ étant la différence entre ces deux dernières lignes : voici la construction. On tirera une ligne EF égale à la ligne donnée D; puis au point E, élevant sur EF la perpendiculaire $EI = \sqrt{A^2 - \frac{1}{4}\overline{PQ}^2}$, l'on mènera par le point I la ligne RS parallèle à EF. Enfin, ayant pris $IK = EF = D$, on portera de I vers R en IG, et de K vers S en KH, deux parties égales entre elles et à $\frac{1}{2}PQ$; et si l'on joint GE, HF, EGHF sera le quadrilatère demandé. En effet, Fig. 107.

$$EF = D,\ GH = PQ + D = B - D + D = B;$$

de plus, joignons FK, les triangles EIG, FKH seront égaux et donneront $FH = EG$: or $EG = \sqrt{\overline{EI}^2 + \frac{1}{4}\overline{PQ}^2}$, et, en vertu de notre construction, $A = \sqrt{\overline{EI}^2 + \frac{1}{4}\overline{PQ}^2}$; donc $EG = A$. Donc le quadrilatère EGHF est construit avec les côtés donnés placés suivant la condition énoncée; mais, en vertu de l'égalité des triangles EGI, FKH, la somme des angles opposés vaut deux angles droits; donc (Récip. Liv. II, Prop. XI) ce quadrilatère est inscriptible.

4°. Si les droites données sont toutes quatre inégales, soit $A > C$, $B > D$: il ne pourra se présenter que trois cas, suivant que l'on aura $C > D$, $C = D$ et $C < D$. La construction étant la même pour ces trois cas, nous ne nous occuperons que du premier. On tirera une ligne $EF = D$, qu'on prolongera de part et d'autre de ses extrémités. On divisera l'excès PQ de B sur D en deux parties PM, MQ qui soient entre elles comme A est à C; et l'on portera de F en I la partie MQ homologue à C, et de E en K la partie PM homologue à A. Fig. 108.

Ensuite, du point K, comme centre, avec un rayon KN = A — C, l'on décrira une circonférence que l'on coupera en O, de manière que OF = IE : ce qui exige que IE soit plus grand que FN, relation qui a lieu en effet, comme nous le démontrerons plus bas. Enfin, par les points K et O, l'on mènera une droite sur laquelle on prendra KV = A ; et après avoir tiré VR parallèle à OF, l'on fera VL = D, puis joignant LI, on aura le quadrilatère demandé VKIL.

En vertu de notre construction, KI = EF + MQ + PM = EF + PQ = D + B — D = B, KV = A, VL = D; et je dis que LI = C. Car, menons FS parallèle à KV, joignons SI, et soit R le point de rencontre des droites VS, KI. Puisque le rayon KO a été pris égal à A—C et que KV=A, il s'ensuit que OV = SF = C : reste donc à démontrer que LI = SF. Or, par construction,

$$KE : FI :: A : C :: KV : SF;$$

donc les triangles VEK, SIF sont semblables ; donc SI est parallèle à VE; et RS : RI :: SV : IE. Mais SV=FO=IE; donc RS=RI, et à cause de SL = SV—LV=SV—D, et de IF = IE — FE = IE — D = SV — D, on a SL = IF; donc aussi RL=RF. De là résulte l'égalité des triangles RSF, RIL qui donnent par conséquent LI = SF = C. Donc le quadrilatère VKIL est formé avec les côtés donnés, placés suivant la condition énoncée.

Nous avons supposé FO ou IE > FN, ce qu'il s'agit de prouver.

Remarquons, à cet effet, que l'excès de B sur D est nécessairement moindre que la somme des lignes A et C. S'il pouvait en être autrement, il s'ensuivrait que la droite B serait plus grande que la somme des trois autres, ou qu'elle serait égale à cette somme : ce qui ne peut être supposé. Puisque, par construction,

$$KE : FI :: A : C$$

et que KN = A — C, il en résulte $KN = \frac{A}{KE}(KE—FI)$; donc KN > KE — FI, à cause de A > PM = KE, d'où l'on

tire KN+FI>EK, ou, en retranchant KN de part et d'autre, IF>EN. Mais IE=IF+FE, FN=EN+FE; donc IE>FN; donc l'arc décrit du point F, comme centre et avec un rayon FO=IE, coupera toujours la circonférence. On peut même assigner un arc dont les deux extrémités soient les limites des intersections de FO avec cette circonférence. D'abord, le point N est une de ces limites, puisque l'on a toujours IE>FN. En second lieu, si l'on observe que IE=IF+FE, FK=EK+EF, et que IF<EK, l'on conclura, dans l'un et l'autre cas de la figure, IE<FK; donc, si du point F comme centre et avec FK pris pour rayon, l'on décrit l'arc KX, le point X sera la seconde limite cherchée. La construction et les raisonnemens seraient les mêmes dans les deux autres cas.

Il reste à démontrer l'inscriptibilité du quadrilatère VKIL. A cet effet, rappelons-nous que les triangles ISL, SIF ont les trois côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle SLI=SFI=VKI; donc la somme des angles opposés VKI, VLI est égale à deux droits. Donc (Récip. Liv. II, Prop. XI) le quadrilatère est inscriptible.

Théorème XIX. *L'aire d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit de la somme de ses deux diagonales, par le sinus de l'angle qu'elles comprennent.*

Lemme. Si dans un triangle dont A, B, C sont les angles, et a, b, c les côtés opposés, on connaît les deux côtés b et c et l'angle A compris, et que l'on nomme h la perpendiculaire CD abaissée de C sur c, on aura, à cause du triangle rectangle ACD,

$$h : b :: \sin A : 1, \quad \text{d'où} \quad h = b \sin A,$$

en supposant le rayon des tables $=1$; mais

$$\text{surf. ACB} = \frac{AB \times CD}{2},$$

donc, en désignant surf. ACB par s, on aura

$$s = \frac{bc}{2} \sin A.$$

Sur les figures à quatre côtés.

Théorème XVI. *Si l'on joint deux à deux les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque, la figure résultante sera un parallélogramme.*

Fig. 103. Soit le quadrilatère ABCD, et soient m, n, p, q les milieux des quatre cotés; menons les diagonales AC, DB; les côtés BA, BC étant divisés également en m et n, la ligne mn sera parallèle à AC, il en sera de même de qp; par la même raison, qm et pn seront parallèles à DB: donc la figure $mnqp$ est un parallélogramme.

La même propriété aurait encore lieu dans le cas où le quadrilatère aurait un angle rentrant.

Théorème XVII. *Soit EFGH un quarré inscrit, inscrivons dans ce quarré le quarré IKLM; dans ce dernier inscrivons de même le quarré PQRS, et ainsi de suite; je dis que la limite de la somme de tous ces quarrés, est le quarré circonscrit ABCD.*

Fig. 104. En effet, nommons S', S'', S''', etc. les surfaces de ces quarrés, en prenant pour unité le rayon du cercle circonscrit, on aura $S' = 2$, $S'' = 1$, $S''' = \frac{1}{2}$; $S^{IV} = \frac{1}{4}$, etc. Or, d'après les règles de l'algèbre, la limite de la somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ etc. est 1; donc $S' + S'' + S'''$ etc. $= 4$: or, ABCD $= 4$; donc ABCD $= S' + S'' + S''' +$ etc.

Problème XX. *Étant donnée la différence AG entre la diagonale et le côté d'un quarré, construire ce quarré.*

Fig. 105. Au point A je fais l'angle GAD égal à la moitié d'un droit; au point G, je mène la ligne GHFE perpendiculaire à AD, et par un point quelconque F de cette ligne, je mène FM parallèle à AC, et je prends FM $=$ GF; je joins les points G et M par la droite GM que je prolonge jusqu'en D; par D je mène DC, DE parallèles à GE, CG, et je dis que CD est le côté du quarré. Car, à cause de FM $=$ GF, on a

$$DE = GE = CG = DC:$$

or CG $=$ DA; donc CD $=$ DA.

Théorème XVIII. *Soit un quadrilatère ABCD; si on en prolonge les côtés AB, DC; AD, BC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en F et G, on aura un autre quadrilatère ABFCGDA ayant les trois diagonales AC, BD, FG qui se coupent deux à deux, savoir BD, AC en* l; *BD, FG en* k; *AC, FG en* h; *et chacune de ces diagonales est coupée par les deux autres en segmens proportionnels.* Fig. 106.

Considérons d'abord le triangle ABC : ce triangle étant coupé par trois transversales DA, DB, DC partant d'un même point D pris dans son plan, et passant par ses trois angles, on aura (Théor. XV, Rem.),

$$\mathrm{A}l \,.\, \mathrm{CG} \,.\, \mathrm{BF} = \mathrm{AF} \,.\, \mathrm{BG} \,.\, \mathrm{C}l \;(*).$$

D'un autre côté, ce même triangle coupé par la transversale *k*FG qui ne passe par aucun de ses angles, donne (Théor. XV)

$$\mathrm{AF} \,.\, \mathrm{BG} \,.\, \mathrm{C}h = \mathrm{A}h \,.\, \mathrm{CG} \,.\, \mathrm{BF} \;(*).$$

Multipliant ces deux équations l'une par l'autre, et supprimant les facteurs communs, on aura cette relation entre les segmens A*l*, C*l*; A*h*, C*h* de la diagonale AC, compris entre les extrémités A et C, et ses points de rencontre *l* et *h* par les deux autres diagonales BD, FG,

$$\mathrm{A}l : \mathrm{C}l :: \mathrm{A}h : \mathrm{C}h \ldots\ldots (\mathrm{A}).$$

On obtiendra de même pour chacune des deux autres diagonales BD, FG, les proportions

$$\mathrm{B}l : \mathrm{D}l :: \mathrm{B}k : \mathrm{D}k \ldots\ldots (\mathrm{B}).$$
$$\mathrm{F}k : \mathrm{G}k :: \mathrm{F}h : \mathrm{G}h \ldots\ldots (\mathrm{C}).$$

(*) Pour déduire avec facilité toutes ces proportions de celles qui ont été trouvées (Théor. XV et XIV), on remarquera qu'en passant de la fig. 106 à la fig. 93, le point *l* est analogue à *b*, G à *a*, F à *c*, et qu'en passant de la fig. 106 à la fig. 92, le point F est analogue à *c*, G à *a*, *h* à *b*, et que, dans ces trois figures, les sommets des angles ont été notés par les mêmes lettres.

de là résulte

$$Rk = 29,64\sqrt{\frac{391,66}{563,16}} = 24^{m},72\,;$$

et conséquemment, en abaissant les perpendiculaires fg, $f'g'$,

$$rk = Rr - Rk = 4^{m},92 = fg.$$

On pourra encore calculer Ag, Bg' à l'aide des proportions

$$\left.\begin{array}{l} Cc : cA :: fg : gA \\ Dd : dB :: fg : g'B \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} Ag = 3^{m},28 \\ Bg' = 8^{m},03. \end{array}\right.$$

111. Si l'on connaissait les angles A et B et le côté AB, on calculerait par la Trigonométrie la ligne AR, puis l'on aurait Rf par la formule

$$Rf = AR\sqrt{\frac{\text{surf. } fRf'}{\text{surf. } ARB}},$$

laquelle servirait encore à la division d'un quadrilatère proposé ACDB en n parties équivalentes par des parallèles au côté AB. En effet, posons ACDB $=$ Q, surf. CRD $=$ T, $Rf = z$, $Rg = z'$ ...., etc.; on aurait

$$AR\sqrt{\frac{T+\frac{Q}{n}}{T+Q}},\ z' = AR\sqrt{\frac{T+\frac{2Q}{n}}{T+Q}},\ z'' = AR\sqrt{\frac{T+\frac{3Q}{n}}{T+Q}}.$$

etc.

Problème XXIII. *Diviser un quadrilatère en deux parties dans le rapport de* m *à* n, *par une droite perpendiculaire à l'un de ses côtés.*

112. Lorsqu'on aura déterminé l'aire du quadrilatère ABDC, on pourra calculer l'aire $ACh'h$ d'après cette égalité

$$ACh'h = \frac{m.\,ABDC}{m+n}:$$

Retranchant de part et d'autre la surface du triangle ACc, il restera

$$Cchh' = \frac{m.\,CcBD - n.\,\text{surf. } ACc}{m+n},$$

ou $$Chh' + \frac{n \cdot \text{surf. } ACc}{m+n} = \frac{m \cdot CcBD}{m+n};$$

Donc la question est réduite à diviser le quadrilatère CcBD dans le rapport donné, par une ligne parallèle au côté Cc, question qui est l'objet du problème précédent.

Problème XXIV. *Partager le quadrilatère ABDC par une ligne DE partant du sommet de l'angle D, de telle sorte que les deux parties ACDE, EDB soient dans le rapport* m *à* n.

Puisqu'on a, d'après l'énoncé, Fig. 113.

$$\text{surf. } EDB = \frac{n \cdot ACDB}{m+n},$$

on connaîtra la base BE, en divisant cette aire par la moitié de la hauteur Dd.

Problème XXV. *Partager le quadrilatère ACDB en deux parties qui soient entre elles comme* m : *à* n *et de manière que la ligne de division MN parte du point M donné sur le côté AB.*

L'aire AMNC est connue, puisqu'on a Fig. 113.

$$AMNC = \frac{m \cdot ACDB}{m+n};$$

ou connaît aussi l'aire ACM; on connaîtra donc par là et la surface CMN et la droite CM; ainsi la hauteur cherchée du triangle CMN sera

$$NH = \frac{\text{surf. } CMN}{\frac{1}{2} CM}:$$

on trouvera donc le point N en menant une parallèle à CM à la distance HN.

Problème XXVI. *Diviser un quadrilatère en trois surfaces équivalentes par des lignes tirées de l'un des angles.*

Après avoir calculé les surfaces ABD, DBC, on connaîtra le rapport $\frac{\text{surf. } ABD}{ABCD}$; et s'il surpasse $\frac{2}{3}$, on en conclura que Fig. 114.

les deux lignes de division doivent être menées dans le triangle ADB; s'il est moindre que $\frac{1}{3}$, elles seront dans le triangle BDC; enfin s'il tombe entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, l'une des deux lignes tombera dans un des triangles, et l'autre dans l'autre.

Soient surf. ABD $=$ A, surf. BDC $=$ C, BM $= x$, BM$' = x'$, et DH la hauteur du triangle ADB : on aura pour le premier cas,

$$A - \frac{DH}{2}x = \tfrac{2}{3}(A + C),$$

d'où
$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{A - 2C}{\frac{1}{2}DH}\right),$$

et
$$A - \frac{DH}{2}x' = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

d'où
$$x' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{2A - C}{\frac{1}{2}DH}\right).$$

Problème XXVII. *Diviser un quadrilatère en trois surfaces équivalentes par des lignes tirées d'un point E pris sur un des côtés.*

Fig.115. Soient ABCD $=$ D, ABCE $=$ C, surf. ADE $=$ A, EM une des lignes de division; EH une perpendiculaire abaissée du point E sur le côté AB; quand A sera $< \frac{1}{3}$D, la ligne EM tombera dans la surface C, et on aura pour déterminer AM$= x$, l'équation

$$A + \frac{EH}{2}x = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

de laquelle on déduira

$$x = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{C - 2A}{\frac{1}{2}EH}\right\} \ldots\ldots (M)$$

Dans le cas de A $> \frac{1}{3}$D, la ligne EM devient EM$'$; faisant AM$' = x'$, puis menant de E une perpendiculaire sur le côté AD prolongé, on aura

$$A - \frac{EH'}{2}x' = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

d'où l'on tire

$$x' = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{2A - C}{\frac{1}{2}EH'}\right\} \ldots\ldots (N)$$

Remarque.

Lorsqu'on a $\frac{C}{2} = A$, ou $C = 2A$, les équations (M) et (N) donnent $x = x' = 0$; ce qui doit arriver, puisqu'alors la diagonale EA est elle-même une ligne de division.

La détermination du point M″ ne peut faire difficulté.

Problème XXVIII. *Du sommet de deux angles opposés d'un quadrilatère, mener deux lignes qui se rencontrent, et de leur intersection une autre ligne, ensorte que les trois surfaces résultantes soient équivalentes entre elles.*

Après avoir mené la diagonale DB, on calculera les surfaces DAB, DBC et leur rapport avec la surface totale : cela fait, si la surface BDC est moindre que le tiers de BADC, le point G sera à la droite de la diagonale DB, et dans le cas contraire, ce point tombera dans la surface BDC. Il s'agit de déterminer le point G ou G′, de manière que la surface BGDC ou BG′DC soit le tiers de la surface BADC, et ensuite de diviser en deux parties la surface BADG ou BADG′. Faisant donc surf. DAB = B, surf. DBC = A, les perpendiculaires $Gh = x$ et $G'h = x'$, et supposant DAB $> \frac{2}{3}$ BADC, on aura Fig. 11

$$B - \frac{DB}{2}x = \frac{2}{3}(B + A),$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{1}{3}\left(\frac{B - 2A}{\frac{1}{2}DB}\right).$$

Lorsque le point G tombera dans le triangle DCB en G′, on donnera le signe + au terme de x. Mais par les points G et G′, ainsi déterminés, si on mène des parallèles MN et M′N′ à la diagonale DB, tous les triangles qui, ayant DB pour base, auront le sommet sur ces parallèles, seront égaux aux triangles DGB, DG′B. On voit donc que les points G ou G′ sont en nombre infini et que leur lieu est une ligne droite; ainsi on pourra en prendre un à volonté pour point de dé-

part de la troisième ligne de division, et abaissant de ce point une perpendiculaire GH qui donne le triangle BGH, que nous nommerons C, on aura pour déterminer HF $= y$, l'équation

$$C \pm \frac{HG}{2} y = \tfrac{1}{3}(B + A):$$

on donnera le signe — au terme $\frac{HG}{2} y$, lorsque le triangle BGH surpassera le tiers de la surface ABCD.

Voyez sur ces questions *mon Traité de la Division des Champs*, dans un ouvrage ayant pour titre : *le Compas de proportion*.

Du Cercle.

Théorème XX. *Si on fait tourner le système des deux* Fig. 116. *tangentes* Tt, Tt′, *dans le plan du cercle* mtt′, *de manière qu'elles soient toujours touchées en* t *et* t′ *par le cercle* tmt′, *le point* T *de concours décrira le cercle concentrique TNT.*

La démonstration de ce théorème se présente d'elle-même ; nous nous dispenserons donc de la donner.

Problème XXIX. *Mener par un point pris dans un cercle une corde égale à une ligne donnée plus petite que le diamètre de ce cercle.*

Soient AB la droite donnée, O le centre du cercle ABMN et Fig. 117. D le point par lequel doit passer la corde égale à AB. Inscrivons la droite AB dans le cercle, abaissons du centre O la perpendiculaire OC sur cette droite, et du point O avec le rayon OC décrivons une circonférence. Les deux tangentes MDN, M′DN′ menées par D, seront les cordes cherchées, parce que, dans un cercle, les cordes égales sont également distantes du centre.

Problème XXX. *Deux cercles étant donnés de grandeur et de position, les couper par une droite, de manière que*

les parties interceptées soient égales à une ligne donnée, cette ligne n'étant pas plus grande que le diamètre du plus petit cercle ; ou de manière que ces parties soient dans un rapport donné.

Si les deux cercles donnés sont égaux, la solution de cette question est facile (Géom., Liv. II, Prop. IV).

Considérons seulement le cas où les cercles donnés sont inégaux ; soient O et *o* les centres de ces deux cercles, et soit PQ la droite donnée. Inscrivons cette droite dans chacun des deux cercles d'une manière quelconque ; soient AB et *ab* les positions de la droite PQ ; des centres O et *o*, abaissons sur ces cordes les perpendiculaires OC, *oc*, et des points O et *o* pris pour centres, avec les distances OC, *oc* comme rayons, décrivons deux circonférences ; à ces circonférences menons une tangente commune T*t* : les parties interceptées A'B', *a'b'* seront égales entre elles et à la droite PQ. Car, en vertu de notre construction, elles sont égales aux cordes AB, *ab*. Fig. 118

Si l'on demandait que les parties interceptées A'B', *a'b'* fussent dans un rapport donné, il faudrait préalablement prendre AB et *ab* dans ce rapport, et appliquer ensuite la construction précédente.

Problème XXXI. *Si l'on suppose qu'une ligne MT tourne de manière qu'elle soit toujours touchée dans le même point M par la circonférence AMB, trouver la courbe que décrit dans ce mouvement un point N donné sur la tangente.*

La considération du triangle rectangle CMN dont les côtés CM et MN sont constans, donne la solution de la question. Fig. 119

Problème XXXII. *Trouver sur le cercle un point de tangence M tel que les parties MR et MR' comprises entre ce point et deux axes perpendiculaires qui se coupent au centre, soient entre elles dans le rapport donné de* n *à* m.

Le problème étant supposé résolu, menons la parallèle *rr'* à RR', et on aura Fig. 120

$$n : m :: \text{RM} : \text{RM}' :: rm : r'm :: \text{C}r^2 : \text{C}r'^2,$$

d'où résulte

$$\sqrt{n} : \sqrt{m} :: Cr : Cr',$$

de sorte que si l'on prend Cr moyenne proportionnnlle entre l'unité et n, et Cr' moyenne proportionnelle entre l'unité et m, puis qu'on joigne rr', la tangente parallèle à rr' sera la tangente cherchée.

Problème XXXIII. *Trouver l'expression de la surface comprise entre deux circonférences concentriques.*

Fig. 121. Soit O le centre commun de deux cercles, ayant pour rayons OA, OB. La surface du premier étant $\pi.\overline{OA}^2$ (Géom. Liv. IV, Prop. XII, Cor. II), celle du second étant pareillement $\pi.\overline{OB}^2$, la surface de la *couronne* ANDMBN'CM' sera $\pi.(\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2)$, ou $\pi.(OA + OB)(OA - OB)$, ou enfin $\pi.BD \times BA$. Au point B, menons la tangente MN : on a $BD \times BA = \overline{BN}^2$; ainsi la surface de la couronne est exprimée par $\pi.\overline{BN}^2$, et l'on voit qu'elle équivaut à celle d'un cercle ayant pour rayon la moitié de la tangente MN.

On a, pour expression de la somme des surfaces des deux cercles des rayons OA et OB,

$$\text{surf. } OA + \text{surf. } OB = \pi.(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2):$$

d'où l'on voit que la *somme des surfaces de deux cercles, équivaut à celle d'un cercle ayant pour rayon l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont les rayons des cercles donnés.*

Problème XXXIV. *Le diamètre AB d'un demi-cercle AMB, étant divisé en deux parties quelconques AD, DB ; sur ces parties comme diamètres, soient décrits deux demi-cercles AND, DLB ; on demande un cercle équivalent à la surface* Fig. 122. *ANDLBMA.*

Au point D, élevons au diamètre AB la perpendiculaire DC qui rencontre en C la demi-circonférence AMB ; sur DC,

comme diamètre, décrivons un cercle CPDQ : ce cercle sera celui qu'on cherche. Car (Géom. Liv. III, Prop. VIII),

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 + 2AD \times DB,$$

ou, puisque $AD \times DB = \overline{CD}^2$, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\overline{CD}^2:$$

or les surfaces des cercles étant comme les quarrés de leurs diamètres, on a

$$AMB : AND : DLB : CPDQ :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{DB}^2 : 2\overline{CD}^2;$$

donc

$$AMB = AND + DLB + CPDQ,$$

d'où

$$CPDQ = AMB - AND - DLB.$$

Problème XXXV. *Étant donné un cercle, trouver quatre autres cercles dont la somme des surfaces soit égale à celle du cercle donné, et dont les rayons soient entre eux comme les lignes données* a, b, c, d.

Je prends $EF = d$, au point F j'élève la perpendiculaire FG que je prends égale à c ; je mène EG, et en G j'élève $GH = b$ perpendiculaire à EG : je joins EH ; en H, j'élève sur HE la perpendiculaire $HK = a$, puis je joins KE, et, à partir du point K, je prends $KL = R =$ rayon du cercle donné ; je mène LO parallèle à EH, LM parallèle à EG, LN parallèle à EF, OM parallèle à HG, et MN parallèle à GF. Fig. 12

En effet, on a

$$\overline{LK}^2 = R^2 = \overline{LO}^2 + \overline{OK}^2,$$
$$\overline{LO}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{OM}^2,$$
$$\overline{LM}^2 = \overline{LN}^2 + \overline{MN}^2;$$

donc

$$R^2 = \overline{OK}^2 + \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{LN}^2.$$

Ainsi la surface du cercle du rayon R, sera égale à la somme des surfaces des cercles dont les rayons sont KO, OM, MN, LN. Maintenant les polygones KEFGH, KLNMO étant semblables, on a cette suite de rapports égaux

$$KO : KH :: OM : HG :: MN : GF :: LN : EF,$$

ou

$$KO : a :: OM : b :: MN : c :: LN : d.$$

Donc les rayons OK, OM, MN, LN sont entre eux comme les lignes a, b, c et d.

Problème XXXVI. *Diviser la circonférence d'un cercle en quatre parties égales, en ne faisant usage que du compas.*

Fig. 124. Soit porté le rayon AB de B en C, de C en D, de D en E, de E en d, de d en c; et soient décrits des points B, E, avec BD comme rayon, deux arcs qui se coupent en a; si de B comme centre, avec Aa comme rayon, on décrit des arcs qui coupent la circonférence en F et f, on aura arc BF = arc FE = arc Bf = arc fE.

En effet, BAE étant un diamètre, et les triangles aAB, aAE étant égaux, chacun des angles aAB, aAE sera droit; donc

$$\overline{aB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{aA}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{aB}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{aA}^2.$$

Soit $\overline{AB} = 1$; on aura $\overline{aB}^2 = \overline{BD}^2 = 3$; donc $\overline{aA}^2 = 3 - 1 = 2$; d'ailleurs, à cause de $\overline{BF}^2 = \overline{Aa}^2 = 2$, on a

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 = 1 + 1 = 2;$$

donc, dans le triangle BAF, l'angle BAF est droit (Récip. Liv. III, Prop. III), et il en est de même de l'angle FAE. Donc les arcs BF et FE sont égaux entre eux, et chacun d'eux est un quart de la circonférence.

Remarques.

1°. Les trois points A, F, a sont en ligne droite.

2°. La circonférence est divisée en deux parties égales aux points B, E; en trois, aux points B, D, d; en quatre, aux points B, F, E, f; en six, aux points B, C, D, E, d, c.

Problème XXXVII. *Diviser une circonférence en huit parties égales, en ne faisant usage que du compas.*

Du point a déterminé précédemment, avec AB comme rayon, soient décrits des arcs qui coupent la circonférence en G et H, et des points G et H comme centres, avec le rayon Aa, soient décrits des arcs qui coupent la même circonférence aux points g et h : la circonférence sera divisée en huit parties égales en B, G, F, H, E, h, f, g. Fig. 124.

En effet, puisque $\overline{Aa}^2 = 2$, dans l'hypothèse AB=1, on aura

$$\overline{Aa}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{aG}^2;$$

l'angle AGa sera donc droit (Récip., Liv. III, Prop. III), et à cause du triangle isoscèle aGA, les deux autres angles vaudront chacun la moitié d'un droit; donc l'angle GAF sera la moitié de BAF; donc l'arc GF = l'arc BG. Mais par construction, arc Gg = arc BF (Probl. XXXVI); ôtant de part et d'autre arc BG, il restera arc GF = arc Bg. Donc, etc.

Problème XXXVIII. *Diviser une circonférence en douze parties égales, en ne faisant usage que du compas.*

Tout étant comme au problème XXXVI, qu'on prenne arc FN = arc Nn = arc FO = arc Oo = $\frac{1}{6}$ de la circonférence, et la circonférence sera divisée en douze parties égales aux points B, N, C, F, D, O, E, o, d, f, c, n. Fig. 124.

En effet, si des arcs égaux BF, FE, on retranche les arcs égaux BC, ED, les arcs restans CF, FD seront égaux. Or l'arc CD est la sixième partie de la circonférence, dont l'arc CF sera la moitié de l'arc CD, et par conséquent le douzième de la circonférence. A cause de l'arc FN = arc CD, on aura encore arc CF = arc CN. Donc aussi, à cause de arc FN = arc CB, on aura arc CN = arc NB, et ainsi des autres arcs qui seront chacun le douzième de la circonférence.

Ces solutions sont extraites de la *Géométrie du Compas de Mascheroni*, ouvrage ainsi nommé parce que le compas est en effet le seul instrument des problèmes qui y sont traités. *Mascheroni* divise encore la circonférence en 24, 5, 10, 120, 20, 240 parties égales ; et un arc en deux parties égales.

Il est maintenant facile de résoudre par la Géométrie et avec le compas seulement, le problème suivant.

Problème XXXIX. *Trouver les racines quarrées de tous les nombres entiers, en ne faisant usage que du compas.*

Fig. 125. *Construction.* Du rayon $AB = 1$ décrivez le cercle BDd, et portez le rayon AB de B en C, de C en D, de D en E, de E en d, de d en c ; des points B et E pris pour centres, et du rayon BD, décrivez des arcs de cercle qui se coupent en a et α ; du même rayon BD et des centres D et d, décrivez des arcs de cercle qui se coupent en V ; du rayon Aa et du centre B, coupez la circonférence au point F ; des centres B et F et du rayon AB, décrivez des arcs qui se coupent en T, et, d'après cette construction,

$AB = \sqrt{1}$	$aV = \sqrt{6}$
$Aa = \sqrt{2}$	$CV = \sqrt{7}$
$BD = \sqrt{3}$	$a\alpha = \sqrt{8}$
$BE = \sqrt{4}$	$BV = \sqrt{9}$
$ET = \sqrt{5}$	$TV = \sqrt{10}$.

Démonstration. En supposant $AB = 1$, on a trouvé (Probl. XXXVI) $\overline{Aa}^2 = 2$, d'où $Aa = \sqrt{2}$. On sait que $BD = \sqrt{3}$, et on a $BE = 2 = \sqrt{4}$.

Les triangles BTA, TAF ayant les côtés égaux, on aura l'angle BTA égal à l'angle TAF, et par conséquent BT sera parallèle à FA ; donc à cause de l'arc BF égal au quart de la circonférence, AF et conséquemment BT seront perpendiculaires à BA. De plus, les points A et E ainsi que les points B et V étant également distans des points D et d, les quatre points B, A, E et V seront en ligne droite (Théor. XI, 1°), et

on aura EV = AB (Théor. XI, 2°), et conséquemment dans le triangle rectangle EBT,

$$\overline{ET}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + 4\overline{AB}^2 = 5,\quad \text{d'où}\quad ET = \sqrt{5}.$$

Dans le triangle rectangle aAV, on a

$$\overline{aV}^2 = \overline{Aa}^2 + \overline{AV}^2 = 2 + 4 = 6,\quad \text{d'où}\quad aV = \sqrt{6};$$

Si l'on observe que les points C, B, c, A, V sont déterminés de la même manière que les points A, p, B, P, Q (Théor. XIII, Coroll.), on verra que l'égalité

$$\overline{AQ}^2 = \overline{Ap}^2 + PQ \times pQ$$

devient

$$\overline{CV}^2 = \overline{CB}^2 + AV \times BV = 1 + 2.3 = 7,\ \text{d'où}\ CV = \sqrt{7}.$$

Comme $Aa = A\alpha$, on aura

$$\overline{a\alpha}^2 = 4\overline{Aa}^2 = 8,\quad \text{d'où}\quad a\alpha = \sqrt{8}.$$

On a ensuite $BV = 3 = \sqrt{9}$. Enfin le triangle rectangle TVB donne

$$\overline{TV}^2 = \overline{TB}^2 + \overline{BV}^2 = 1 + 9 = 10,\quad \text{d'où}\quad TV = \sqrt{10}.$$

Ces racines serviront à faire trouver celles des nombres entiers de 10 à 36. A cet effet, soit soustrait le nombre dont on veut avoir la racine du quarré immédiatement supérieur, qui sera 16, 25 ou 36; avec la racine du reste qu'on sait trouver, prise pour rayon, soit décrite la demi-circonférence QLR; avec la racine du quarré immédiatement plus grand, prise pour rayon, et des centres Q et R, soient décrits deux arcs qui se coupent en P, la ligne AP sera la racine cherchée.

En effet, l'angle PAQ étant droit, on aura Fig. 126.

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{AP}^2,\quad \text{d'où}\quad \overline{PQ}^2 - \overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2;$$

maintenant supposons $\overline{PQ}^2 = 36$, et égalons successivement $\overline{AQ}^2$ aux nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10, $\overline{AP}^2$ sera successivement égal aux quarrés depuis 36 jusqu'à 25; donc on aura successivement pour AP les racines de tous ces nombres. Si on fait $\overline{PQ}^2 = 25$, on aura de la même manière les racines depuis 25 jusqu'à 16, et faisant $\overline{PQ}^2 = 16$, on aura les autres racines depuis 16 jusqu'à 10.

Si on veut, par exemple, la racine de 29, on aura

$$\overline{PQ}^2 - \overline{AQ}^2 = 36 - 7 = \overline{AP}^2 = 29; \quad \text{d'où} \quad AP = \sqrt{29}.$$

Il est clair qu'on peut avec ces racines avoir celles des nombres supérieurs, et ainsi de suite indéfiniment.

Problème XXXX. *Dans un cercle d'un rayon donné, trouver, en ne faisant usage que du compas, une corde qui diffère peu du quart de la circonférence.*

Avec le rayon AB, coupez sur la circonférence les arcs
Fig. 127. égaux BC, CD, DE; puis des centres B et E avec le rayon BD, décrivez deux arcs qui se coupent en a; puis du point C pris pour centre et du rayon Ca, décrivez un arc qui coupe la circonférence en b, la corde Bb sera la corde cherchée.

Le rayon AB étant $=1$, si l'on désigne par A l'arc BC $= 60°$, et par A' l'arc Cb dont la corde est Bb, on déduira de la formule

$$\cos A' = \cos(45° - A) - \sin(45° - A) - \sin 30° \text{ (*)},$$

$A' = 43° 33' \frac{286}{2005} = BCb$; donc l'arc $BCb = 103° 33' \frac{286}{2005}$; sa moitié qui est de $51° 46' \frac{1145}{2005}$, a pour sinus 0,7855998; donc la corde Bb qui est le double de ce sinus, aura pour valeur 1,5711996. Le quart de la circonférence étant (Géom., Liv. IV,

(*) Nous supprimerons la démonstration de cette formule, parce qu'elle exigerait celle de plusieurs théorèmes qui ne nous seraient d'aucune utilité dans la suite. Voyez *la Géométrie du Compas, Livre douzième.*

Prop. XIV) 1,5707963, l'erreur ne sera donc que de 0,0004 environ.

Remarque.

D'après *Archimède*, et en supposant le rayon = 1, le quart de la circonférence, est $\frac{11}{7}$ = 1,5714, dont la différence avec 1,5707663 est 0,0007 ; cette différence est donc plus grande que celle qui résulte de la construction ci-dessus dont la simplicité est remarquable.

Problème XXXXI. *Étant donnés trois points non en ligne droite, déterminer tous les triangles équilatéraux dont les côtés passent par ces points ; assigner le plus grand et le plus petit.*

Lemme I. Nous rappellerons *qu'un angle formé par une corde AB et par le prolongement AC d'une autre corde AD, a pour mesure* $\frac{1}{2}$ *(AND + AMB).*

Réciproquement, *si un angle CAB a pour mesure la demi-somme des arcs AMB, AND, le sommet A de cet angle sera sur la circonférence.* Fig. 128.

Lemme II. *Si deux cercles O et C se coupent, la plus grande des sécantes communes à ces deux cercles, que l'on puisse mener par un de leurs points d'intersection B, est la sécante DE parallèle à la ligne OC qui joint les centres.*

En effet, par le point B menons toute autre sécante IK ; je dis que l'on a IK < DE. Car, si des centres O et C, nous abaissons sur ces droites les perpendiculaires OM, CN ; OF, CG, nous serons ramenés à démontrer que MN est plus grand que FG. Or MN = OC et OC > FG, puisque si l'on mène CH parallèle à FG, on a CH = GF et CH < CO ; donc FG < MN. Donc aussi 2FG ou IK < 2MN ou DE. Fig. 129.

Venons maintenant à la solution de la question proposée.

Soient A, B, C les trois points donnés : joignons AB, AC, BC. Décrivons sur ces trois côtés du triangle ABC les segmens ASRB, ARQC, BPRC capables d'un angle égal à $\frac{1}{3}\pi$, π désignant la circonférence : ces trois cercles se couperont Fig. 130.

en un même point. Car, soit R le point d'intersection des arcs ARB, BRC, et menons les cordes AR, BR, CR; les angles ARB, BRC seront chacun égal à $\frac{1}{3}\pi$; il en sera donc de même de l'angle ARC. Donc (Récip., Liv. II, Prop. X), le point R est sur l'arc ARQC. Maintenant du point A à un point quelconque Q de l'arc CQR, menons la droite AQ qui coupe en S l'arc ARB; tirons la ligne CQP qui rencontre en P l'arc CRB, joignons BS: je dis que cette droite passe par le point P. En effet, en vertu du lemme I, l'angle $SQP = \frac{1}{6}\pi$; il en est de même de l'angle QSB: donc le troisième angle est égal à $\frac{1}{6}\pi$, ou à la somme des arcs CRP + PB; donc, d'après la réciproque du lemme précité, il a son sommet sur l'arc CRB, en P. On voit de plus que le triangle PQS est équilatéral, et que ses côtés prolongés passent par les trois points A, B, C.

En répétant la construction précédente pour un second point de l'arc CQR, on obtiendra un second triangle qui satisfera aux conditions demandées. On en construira un troisième de la même manière; de sorte que l'on en pourra former ainsi autant qu'il y a de points dans l'arc CQR. Au reste, cette construction est générale, comme on pourra s'en assurer; c'est-à-dire qu'elle s'applique en quelque lieu du cercle AQ'CR que soit situé le point Q.

Ce point Q a deux positions remarquables: la première R donne le *minimum* cherché: car ce point est celui où concourent les lignes AQ, CP, BS, lorsque AQ est en AR.

En second lieu, si par le point A, on mène Q'P' perpendiculaire à AR, le point Q' donnera le triangle Q'P'S' pour le *maximum*. En effet, Q'P' est parallèle à la ligne MN qui joint les centres M et N, puisque celle-ci est perpendiculaire sur AR; donc, d'après le lemme II, Q'P' est plus grande que toute autre ligne $q'p'$, terminée aux cercles N et M. Donc aussi le triangle Q'P'S' équilatéral, comme il est facile de le voir, est plus grand que tout autre $q'p's'$ passant par les points A, B, C comme le premier. Il est aussi plus grand que tous les triangles équilatéraux tels que PQS dont

les prolongemens passent par les points A, B, C; donc il est un *maximum* entre tous les triangles équilatéraux dont les côtés passent par ces points.

On pourrait demander s'il n'existe pas un triangle remplissant les conditions requises, et cependant plus grand que Q'P'S'. La réponse est facile : quel que soit ce triangle, puisqu'il passe par les points A, B, C, ses angles ont pour mesure la moitié des arcs ARB, ARC, BRC; donc (Récip., Liv. II, Prop. X) les sommets de ces angles sont sur les circonférences de ces arcs.

Des aires du cercle, du secteur et du segment.

Problème XXXXII. *Trouver l'aire d'un cercle dont on connaît le rayon.*

Si l'on désigne l'aire du cercle par s, son rayon par r, et par π le rapport de la circonférence au diamètre, on sait que

$$s = \pi r^2,$$

l'approximation sera presque toujours suffisante, en supposant $\pi = 3,14$.

Soit, pour exemple, $r = 16^m$, on aura

$$s = 3,14 \times \overline{16}^2 = 803^{m.c},84.$$

Si on voulait opérer par les logarithmes, au double du logarithme du rayon, on ajouterait celui de π, qui est 0,4971479, et la somme sera le logarithme de l'aire demandée.

On peut se proposer *de calculer le rayon d'un cercle dont l'aire est connue.*

Problème XXXXIII. *Déterminer l'aire d'un secteur dont l'arc est de* n *grades, et dont le rayon* $= r$.

Puisque l'aire s du secteur est à celle du cercle comme l'arc du secteur est à la circonférence entière, et que deux arcs d'un même cercle sont entre eux comme les nombres de grades qu'ils comprennent; on a

$$s : \pi r^2 :: n : 400, \text{ d'où } s = n \cdot \frac{\pi r^2}{400};$$

par conséquent

$$\log s = \log n + 2\log r + \bar{3},8950879\ (*).$$

Problème XXXXIV. *Calculer l'aire du segment dont l'arc comprend* n *grades, et dont le rayon $= r$.*

L'aire du segment est égale à celle du secteur moins l'aire du triangle. Or, par ce qui précède,

$$\textit{aire du secteur} = n\frac{\pi r^2}{400},$$

$$\textit{aire du triangle} = \frac{r^2}{2}\sin n;$$

donc

$$\textit{aire du segment} = 2\log r + \log\tfrac{1}{2}\left(n\frac{\pi}{200} - \sin n\right)$$

Si on fait $a = n\frac{\pi}{200}$, on aura

$$\log a = \log n + \bar{2},1961179;$$

partant

$$\textit{log du segment} = \log r + \log\tfrac{1}{2}(a \mp \sin n);$$

le signe — ayant lieu lorsque $n < 200$, et le signe + pour $n > 200$.

Des contacts.

Problème XXXXV. *Étant donné un cercle, on propose de lui mener une tangente qui fasse avec une ligne donnée un angle donné.*

Fig. 131. Soit O le centre du cercle, soit AB la ligne donnée : au point A je mène la ligne AC faisant avec AB l'angle donné; de O je mène OG perpendiculaire sur AC, et par F la parallèle FE à AC, laquelle sera la tangente cherchée.

Problème XXXXVI. *Décrire un cercle tangent au point O de la ligne AB, et qui passe par un point M donné.*

(*) Voyez, sur les caractéristiques négatives, mon *Traité d'Algèbre*, première section.

Sur le milieu de MO on élevera une perpendiculaire indéfinie DD′ et par le point O une perpendiculaire OO′; ces perpendiculaires se couperont au centre du cercle qui satisfera aux conditions énoncées. Fig. ...

Problème XXXXVII. *On donne le rayon d'un cercle, et on propose de trouver la position de son centre, sous la condition que le cercle touche les deux droites données et non parallèles AB, AC.*

Le centre O cherché se trouve sur la ligne AM qui divise également l'angle BAC; mais il se trouve aussi sur la parallèle DO à AC, menée à une distance de cette dernière ligne égale au rayon donné. Fig.133.

Problème XXXXVIII. *Mener une tangente commune à deux cercles dont les centres et les rayons sont donnés.* Fig.134.

La solution n'a pas de difficulté, si les cercles donnés sont décrits du même rayon.

Soient maintenant O, O′ les centres des deux cercles dont les rayons sont différens; la tangente cherchée doit couper la ligne des centres en un point R qu'il s'agit de déterminer. Supposons le problème résolu, cette tangente sera perpendiculaire aux rayons OT, O′T menés aux points de contact; on aura donc la proportion

$$RO : RO' :: OT : O'T',$$

d'où résulte

$$RO - RO' : OT - O'T' :: RO : OT,$$

on déduit de là

$$RO = OT . \frac{RO - RO'}{OT - O'T'} = \frac{OT \times OO'}{OT - O'T'}.$$

Autre solution. Je joins les deux centres par la ligne droite OO′; sur le rayon OA perpendiculaire à OO′, je prends AE = O′A′, et je décris un cercle du rayon OE; je lui mène de O′ une tangente O′K, par O et K une ligne OKT, et Fig.135.

par O′ une perpendiculaire O′T′ à O′K, puis je joins T et T′, et TT′ sera la tangente cherchée.

Problème XXXXIX. *Décrire un cercle d'un rayon donné, qui passe par un point donné et qui touche une droite donnée.*

Fig. 136. Soient AB la ligne et E le point donnés; par un point quelconque G′ j'élève sur AB une perpendiculaire G′D égale au rayon donné, et par D je mène DC parallèle à AB; le centre du cercle sera sur cette droite. Du point E, comme centre, avec un rayon EO = DG′, je décris un arc qui coupe DC au centre cherché.

Problème L. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui touche une droite donnée.*

1°. Il peut arriver que la droite donnée et celle qui joint les deux points donnés, soient parallèles : alors la solution est facile.

Fig. 137. 2°. Soient A et B les deux points donnés et PQ la droite donnée : soit R le point d'intersection des droites BA, QP; prenons, à compter de ce point, la partie RC moyenne proportionnelle entre RA et RB; enfin, décrivons un cercle qui passe par les trois points A, B, C : le problème sera résolu.

Car, en vertu de notre construction, $\overline{RC}^2 = RA \times RB$; d'où il suit (Récip., Liv. III, Prop. XXII) que la droite RC est tangente au cercle.

Il est facile de résoudre cette question : *trouver sur une droite donnée le lieu du sommet du plus grand angle dont les côtés passent par deux points donnés.*

Problème LI. *Décrire un cercle qui passe par un point donné, et qui soit tangent à deux droites données.*

On donne les deux lignes AB, AC et le point x. Le centre du cercle cherché doit être sur la ligne AD qui divise également l'angle BAC : d'un point O quelconque pris

Fig. 138. sur AD, je mène les perpendiculaires OF, OE qui seront égales, ensorte que le cercle FEG sera tangent aux deux droites. Tirant Ax qui coupe le cercle de OF en G, si du

point x on mène la parallèle xO' à GO, et du point O' la parallèle $O'F'$ à OF, on aura le centre O', puis le rayon $O'F'$ du cercle cherché. En menant xm' parallèle à Gm, et $n'O'$ perpendiculaire sur le milieu de xm', on aurait encore le centre O'.

Nous donnerons une autre solution de ce problème.

Lemme. *Par un point donné, mener une droite qui coupe, à angles égaux, deux droites données de position.*

Si les droites données sont parallèles, une perpendiculaire menée par le point donné à l'une de ces lignes, le sera à l'autre, et le problème sera résolu. Si ces droites concourent, on divisera en deux parties égales, l'angle qu'elles forment (Probl. V), et l'on mènera ensuite une perpendiculaire à la ligne de division. Il est bien entendu que le point est situé entre les droites.

Cela posé, soit A le point donné, et soient BC, DE les droites données : si elles sont parallèles, la solution est facile. Fig. 139.
Dans le cas contraire, par le point A menons, d'après le lemme précédent, la droite IAH qui fasse avec les droites BC, DE les angles égaux IHC, HIE. Soit K le milieu de HI : prenons $KL = KA$, et, au moyen du problème L, décrivons un cercle qui passe par les points A et L, et qui soit tangent à la droite BC; je dis qu'il le sera pareillement à la droite DE. Car soit O le centre de ce cercle, et soit M son point de contact avec la droite BC; joignons OM, OH, OI, et du point O abaissons la perpendiculaire ON à DE. Les triangles OMH, ONI seront égaux et donneront $ON = OM$; donc la droite DE est tangente au cercle.

Théorème XXI. *Si quatre cercles touchent chacun extérieurement ou intérieurement trois côtés d'un quadrilatère quelconque, les centres de ces cercles seront toujours sur une même circonférence.*

Soit ABCD le quadrilatère donné; soient O, O', O″, O‴ Fig. 140.
les centres des quatre cercles dont chacun touche extérieu-

rement trois des côtés du quadrilatère, il suffit de prouver que le nouveau quadrilatère est inscriptible, ou que la somme de deux de ses angles opposés, est égale à celle de deux angles droits.

Le centre O étant l'intersection des droites AO, DO qui divisent également les angles tAt', $t'Dt''$, on a, en désignant l'angle droit par D,

$$tAt' + DAB = 2D; \quad \text{d'où} \quad OAD = D - \frac{DAB}{2};$$

On a de même $$ODA = D - \frac{ADC}{2};$$

donc $$AOD = 2D - (OAD + ODA) = \frac{DAB + ADC}{2}.$$

Par la même raison,

$$CO''B = 2D - (O''BC + O''CB) = \frac{ABC + BCD}{2};$$

donc

$$AOD + CO''B = \frac{DAB + ADC + ABC + BCD}{2} = 2D.$$

Remarque.

Les lignes OO', O'O'', O''O''', O'''O passent par les sommets D, C, B, A du quadrilatère donné, ce dont il est facile de se rendre raison.

Nous laissons à démontrer la seconde partie de la proposition, ainsi que le théorème suivant :

1°. *Si les côtés d'un quadrilatère circonscrit, touchent une circonférence aux sommets des angles d'un quadrilatère inscrit, leurs diagonales se couperont toutes au même point.*

Théorème XXII. 1°. *Si l'on mène une tangente RTT' aux deux cercles qui ont pour centres C et C', tangente qui rencontrera en R la ligne des centres C'C, et que par les points de tangence* t *et* t' *du cercle C'' avec les cercles C et C', on mène une droite* tt', *cette droite ira passer par le point R, dans toutes les*

Fig. 141.

positions du cercle tangent C″. 2°. Si, par le point R, on mène les sécantes Rm′m, *Rn′*n, *les quatre points* m′, m, n, n′ *seront sur une même circonférence.*

Deux points n'étant pas suffisans pour déterminer le centre et le rayon d'un cercle, le cercle C″ peut toucher les cercles C et C′ dans une suite de points t et t', et il est facile de trouver les extrémités des arcs de-contact sur ces deux derniers cercles.

1°. Les triangles semblables RCT, RC′T′ donnent la proportion

$$RC : RC' :: CT : C'T' \ldots\ldots (1).$$

Supposons que la droite menée par t' et t rencontre la ligne des centres en un point R′ différent de R, et menons la droite $C't''$; les triangles $R'Ct$, $RC't''$ seront semblables, parce que l'angle $C't''t' = C't't'' = C''t't = C''tt' = CtR'$: de là on tire

$$R'C : R'C' :: Ct : C't'' :: CT : C'T' \ldots\ldots (2).$$

Des proportions (1) et (2), on déduit celle-ci :

$$RC : RC' :: R'C : R'C',$$

et conséquemment

$$RC : RC' - RC :: R'C :: R'C' - R'C,$$

ou bien.

$$RC : CC' :: R'C : CC', \text{ d'où } RC = R'C,$$

d'où l'on conclut que le point R′ est en R.

2°. Les cordes mn, $p'q'$ étant parallèles, ainsi que les cordes pq et $m'n'$, comme nous le prouverons plus bas, il s'agit de démontrer que le quadrilatère $mnn'm'$ est inscriptible. Or

$$mm'n' = p'q'n';$$
$$mnn' = mpq = p'm'n';$$

ajoutant ces égalités, on trouve

$$mm'n' + mnn' = p'q'n' + p'm'n' = 2D,$$

D désignant un angle droit. Donc, etc.

Pour démontrer le parallélisme des cordes $m'n'$ et pq, et, en même temps, celui des cordes mn et $p'q'$, nous considérerons deux autres points de contact quelconques o et t, et nous mènerons les sécantes $Roo'o''$, $Rtt't''$; on aura en o' et t' les points de contact correspondans aux points o et t; et il suffira de prouver que la corde ot est parallèle à la corde $o''t''$. Ayant mené les cordes To, ot, Tt; $T'o''$, $o''t''$, $T't''$, comme o et t sont deux points de contact, on aura, d'après la première partie du théorème, cette suite de rapports égaux,

$$RC : RC' :: RT : RT' :: Rt : Rt'' :: Ro : Ro''.$$

Donc

$$Rt : Rt'' :: Ro : Ro'',$$

et conséquemment les cordes ot et $o''t''$ sont parallèles. Donc, etc.

Problème LII. *Inscrire, dans un cercle donné, trois cercles qui le touchent et qui se touchent entre eux.*

Nous donnerons deux solutions de cette question, dont la seconde ne suppose que l'usage du compas.

1°. Je circonscris au cercle donné DEF, un triangle équilatéral
2. ABC ; je joins le centre O de ce cercle avec les sommets A, B et C du triangle équilatéral, par les droites OA, OB et OC; et dans chacun des triangles AOB, AOC et BOC, j'inscris un cercle, en divisant chaque angle en deux parties égales. De cette manière on a trois cercles O'D, O''E et O'''F inscrits dans le cercle DEF, dont les rayons sont égaux, et qui se touchent dans les trois points G, H, I.

Je dis d'abord que ces trois cercles sont égaux. En effet, les triangles AOB, AOC et BOC sont égaux comme ayant tous les côtés égaux ; et il en est de même des triangles AO'B, BO''C, AO'''C; car AB = BC = AC ; les angles O'AB, O''BC, O'''CA; O'BA, O''CB, O'''AC sont égaux comme moitiés d'angles égaux ; par conséquent les hauteurs O'D, O''E, O'''F sont égales; or ces hauteurs sont les rayons des cercles O',

O″, O‴; donc ces rayons sont égaux. Je dis maintenant que ces cercles doivent se toucher en trois points H, G, I. Le cercle O‴, par exemple, doit toucher le cercle O′ au point G intersection de O′O‴ avec AO : car le cercle O‴ étant tangent en F et G aux droites AC, AO, on a AF = AG; on a de même AD = AG′, G′ étant le point de tangence, supposé différent de G, du cercle O′ avec la droite AO : or, à cause de AF = AD, on a AG′ = AG; donc la droite AO touche en un même point G les cercles O′ et O‴; donc ce point G est le point de tangence de ces cercles. Or, à cause de l'égalité des triangles AGO‴, AGO′, l'angle AGO‴ est égal à l'angle AGO′, et comme d'ailleurs chacun de ces angles est droit, nécessairement la ligne O′GO‴ est droite; conséquemment le point d'attouchement G se trouve sur la ligne des centres O′O‴. Les points H et I sont donc aussi, et par la même raison, ceux d'attouchement des cercles O″ et O‴, O′ et O″.

On pourrait chercher les centres et les rayons de trois autres cercles qui toucheraient extérieurement les trois côtés du triangle équilatéral en D, E, F, et qui se toucheraient deux à deux.

2°. La seconde solution est fondée sur le lemme suivant.

Lemme. *Tout étant comme aux théorèmes XI, XII et XIII; si l'angle* RpQ *est droit, que l'angle* RpS = RpA, *et que* pS = pR = pA, *la droite AS sera parallèle et égale à P*p, *et on aura*

$$\overline{AQ}^2 = \overline{RQ}^2 - AS.pQ.$$

1°. Si des deux angles RpQ, Rpq on soustrait les angles égaux RpA, RpS, il restera les angles égaux ApP, Spq; mais l'angle ApP est égal à l'angle APp; donc l'angle Spq est égal à l'angle APq; donc les droites AP, Sp sont parallèles; mais elles sont égales, par construction; donc les deux droites AS et pP sont égales et parallèles. Fig. 14

2°. On a aussi $\overline{RQ}^2 = \overline{Rp}^2 + \overline{pQ}^2 = \overline{Ap}^2 + \overline{pQ}^2$, et d'après

le théorème XIII, $\overline{AQ}^2 = \overline{Ap}^2 + \overline{pQ}^2 - pP \,.\, pQ$; donc $\overline{AQ}^2 = \overline{RQ}^2 - pP.pQ = \overline{RQ}^2 - AS.pQ$.

Venons maintenant à la solution du problème.

Construction. Dans la circonférence du cercle donné, portez le rayon AB de B en C, de C en D, de D en E, de E en *d*, de *d* en *c* : du centre B et du rayon BD soit décrit un arc qui passe par les points *a*, *p*, *α*; du centre E et du même rayon BD, soit coupé cet arc en *a* et *α* ; avec le même rayon
f.144 et des centres C et *c* soient décrits deux arcs qui se coupent en V, et des centres D et *d*, deux arcs qui se coupent en *v*; des centres V et *v* et avec la même ouverture de compas, soient décrits deux arcs qui passent par *m* et *n* ; des centres *a* et *α* et du rayon AB, soit coupée la circonférence du cercle donné en G et H et en *g* et *h* ; soit porté le rayon AB de G en L, de H en I, de *g* en *l*, de *h* en *i* ; soit pris BF$=$A*a*, LY$=$IY$=$*ly*$=$*iy*$=$IL, F*m*$=$F*n*$=$Y*y*, D*p*$=$D*n* ; du centre A et du rayon connu *mn* soit décrit le cercle PSRXQT, sur la circonférence duquel prenant un point arbitraire P, on portera le rayon AP de P en S, de S en R, de R en X, de X en Q, de Q en T ; enfin des centres P, Q, R et du rayon *pn*, soient décrits trois cercles qui seront les cercles cherchés.

Démonstration. On a trouvé (Probl. XXXVII) que l'angle GA*a* était égal à la moitié d'un droit, ou à $\frac{1}{8}$ de la circonférence, d'ailleurs l'arc GL est, par construction, $\frac{1}{6}$ de la circonférence ; donc arc GL$-$arc GF, ou arc FL $= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ de la circonférence, et conséquemment l'arc IL en est $\frac{1}{12}$; donc sa corde que nous désignerons par IL est, pour AB $= 1$,

$$IL = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} \ (*) ;$$

(*) La corde d'un douzième est le double du sin 15°, pour lequel on trouve (Théor. et Probl. Trigonom. rect.) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$, dont le double est $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})}$.

Ff est un diamètre (Prob. XXXVI), et les points G et H étant symétriques par rapport à F, ainsi que g et h par rapport à f, les points I et L sont aussi symétriques par rapport à F, ainsi que i et l par rapport à f; donc Li est aussi un diamètre, et conséquemment le triangle rectangle LIi donne

$$\overline{Li}^2 = \overline{IL}^2 + \overline{Ii}^2, \quad \text{donc} \quad 4 = 2 - \sqrt{3} + \overline{Ii}^2,$$

d'où $$Ii^2 = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad Ii = \sqrt{(2 + \sqrt{3})}.$$

Les points a, I, i, B, A étant analogues aux points Q, A, S, R, p du lemme premier, on aura, d'après ce lemme et les théorèmes,

$$\overline{aI}^2 = \overline{Ba}^2 - Ii.Aa = 3 - \sqrt{(2 + \sqrt{3})}\sqrt{2}$$
$$= 3 - \sqrt{(4 + 2\sqrt{3})} = 3 - (1 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}.$$

Donc $aI = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = IL$. Par les mêmes raisons, $aL = LI$, donc, d'après la construction, $aIYL$ sera un rhombe, et on sait que pour cette figure

$$\overline{aY}^2 + \overline{IL}^2 = 4\overline{aI}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{aY}^2 = 4\overline{aI}^2 - \overline{IL}^2 = 3\overline{IL}^2,$$

et conséquemment

$$aY = IL\sqrt{3} = \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})};$$

mais les points I, L étant également éloignés du point A, les points a, Y, A seront dans la même droite (Théor. XI); donc (*)

$$AY = Aa - Ya = \sqrt{2} - \sqrt{(6 - 3\sqrt{3})}$$
$$= \sqrt{2} - \left(3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = IL;$$

(*) Voyez la première Section de mon Algèbre, sur l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, en partie incommensurables. D'ailleurs, en élevant au quarré les deux membres de l'égalité $\sqrt{(6 - 3\sqrt{3})} = 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}$, on retombe sur une égalité. On constatera de même l'égalité $\sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})}$.

la même démonstration s'applique à la ligne Ay. Ensuite le point y étant sur la ligne au, c'est-à-dire, sur la droite aA prolongée, on aura $Yy = 2AY$. Or des points V, B, A, E, v, les trois premiers étant également distans des points C et c, sont en ligne droite, et les deux derniers étant aussi à des distances égales de D et d, sont en ligne droite; donc ces cinq points se trouvent sur les droites AB et AE, qui ne sont qu'une seule et même droite.

Si on suppose, pour un moment, que les points m et n soient sur cette même droite, on aura

$$Am = AV - Vm = 2 - \sqrt{3}.$$

En effet, si l'on compare les points C, c, V, B, A, E avec les points A, B, Q, P, p, q (théorème XI), en observant que, d'après la construction, $BC = CA = Ac = cB$, $CV = CE = Ec = cV$, on aura $VB = AE$, d'où $AV = 2$, et, par construction, $Vm = BD = \sqrt{3}$. On trouvera de même

$$An = Av - vn = 2 - \sqrt{3}.$$

Donc

$$\overline{Fm}^2 = \overline{Am}^2 + \overline{AF}^2 = 7 - 4\sqrt{3} + 1 = 4(2 - \sqrt{3}),$$

et conséquemment

$$Fm = 2\sqrt{(2 - \sqrt{3})} = 2AY = Yy,$$

ce qui résulte en effet de la construction. Ainsi le point m sera en effet sur la droite VA, et le point n sur la droite Av,

Puisque $Am = 2 - \sqrt{3}$, on aura $mn = 4 - 2\sqrt{3}$; or les triangles BpD, vnD ayant les côtés égaux entre eux, à cause de $BD = Dv$, $Dp = Dn$, $Bp = nv$ puisque $vn = BD = Bp$; d'après la construction, on aura l'angle Dvn égal à l'angle DBp; mais l'angle Dvn, qui est le même que l'angle DvB, étant égal à l'angle DBV, on aura l'angle $DBp = DBv$; donc le point p est dans la droite AE: on a ensuite $Dp = Dn$ et $dn = dp$; comparant donc les points D, d, A, n, p, E

aux points A, B, Q, P, p, q du théor. XI, on trouvera

$$pE = nA = 2 - \sqrt{3},$$

d'où

$$pn = AE - 2An = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$$

De plus, le triangle équilatéral PQR étant semblable au triangle équilatéral BDd, et par conséquent aussi le triangle ABD étant semblable au triangle APR, on aura

$$AB : BD :: AP : PR,$$

c'est-à-dire, en observant que, par construction, AP$=mn$,

$$1 : \sqrt{3} :: 4 - 2\sqrt{3} : PR;$$

d'où on tire

$$PR = 4\sqrt{3} - 6 = 2(2\sqrt{3} - 3) = 2pn.$$

Donc la ligne PR étant coupée par moitié au point k, ce point se trouvera sur les deux circonférences décrites des points P et R, et il sera conséquemment leur point de contact. Qu'on ajoute ensuite à la droite AR $= mn = 4 - 2\sqrt{3}$, le rayon du cercle décrit du centre R, c'est-à-dire la droite R$r = np = 2\sqrt{3} - 3$, et on aura

$$Ar = AR + Rr = 4 - 3 = 1 = AE = AB;$$

donc le cercle décrit du centre R touchera intérieurement le cercle donné, puisque la distance des centres AR, est égale à la différence des rayons Ar — Rr.

Problème LIII. *Du centre A décrire un cercle qui touche les trois cercles inscrits par la construction précédente, et dont les centres sont P, Q, R.*

On prendra une troisième proportionnelle aux deux droites AB, Am; avec cette ligne comme rayon et du centre A, on décrira un cercle qui sera le cercle cherché.

En effet, AB étant $= 1$, et A$m = 2 - \sqrt{3}$, la troisième

proportionnelle sera $7 - 4\sqrt{3}$. Si maintenant du rayon $Ar = 1$, on soustrait le diamètre qr du cercle décrit du centre R, lequel est $= 2pn = 4\ \ 3 - 6$, on aura précisément pour diffé-
Fig. 144. rence $7 - 4\sqrt{3}$. Donc un cercle décrit du centre A avec cette troisième proportionnelle pour rayon, sera tangent au point q au cercle du centre R, et conséquemment il le sera aux deux autres cercles.

Problème LIV. *Inscrire, au moyen du compas, dans un cercle d'un rayon donné quatre cercles qui lui soient tangens, et qui soient tangens entre eux.*

Lemme. *Si on a deux circonférences concentriques BFEf, QRST, qu'on ait divisé la première en quatre parties égales aux points B, F, E,* f, *et qu'on ait pris arbitrairement sur la seconde un point Q, je dis que si, avec la distance BQ, comme rayon, on décrit des points F, E,* f, *comme centres, des arcs qui coupent la seconde circonférence en R, S, T, cette circonférence sera divisée en quatre parties égales aux points Q, R, S, T.*

En effet, les triangles QBA, FAR sont parfaitement égaux, comme ayant les côtés égaux chacun à chacun; donc l'angle BAQ est égal à l'angle FAR; retranchant de part et d'autre
Fig. 145. l'angle commun FAQ, il restera l'angle BAF égal à l'angle QAR; or le premier est droit, donc le second sera droit; donc l'arc QR est un quart de la circonférence. On prouvera de la même manière, que chacun des arcs RS, ST et conséquemment TQ mesure un angle droit. Donc, etc.

Cela posé, occupons-nous de la solution du problème.

Construction. Portez le rayon AB de B en C, de C en D, de D en E; des points B et E comme centres, avec le rayon
Fig. 146. BD, décrivez des arcs qui se coupent en a; du point B avec le rayon Aa, coupez la circonférence donnée en F et f; du point F avec AB pour rayon, coupez la même circonférence en N et O, et des points N et O avec BD pour rayon, décrivez deux arcs qui se coupent en P. Du centre A

et du rayon aP, soit décrit le cercle QRST; puis prenant arbitrairement un point Q sur la circonférence de ce cercle, avec le rayon BQ et des centres F, E, f, coupez cette circonférence en des points R, S, T. Enfin des centres Q, R, S, T et du rayon aF, soient décrits quatre cercles qui seront les cercles cherchés.

Démonstration. Comme on a (Prob. XXXVI)

$$BF = FE = Ef = fB,$$

on aura aussi, d'après le lemme

$$QR = RS = ST = TQ;$$

donc l'angle TAQ sera droit, et conséquemment

$$\overline{TQ}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{AQ}^2 = 2\overline{AT}^2.$$

Ayant fait $AB = 1$, on aura aussi $FP = 1$; car il résulte de la construction que la droite PF prolongée va passer par le centre A et par le point f; donc l'arc FCN étant de $60°$, l'angle NFf sera de $60°$, et conséquemment son supplément NFP sera de $120°$; d'ailleurs l'angle NPF aura pour mesure $\frac{1}{2}NBF - \frac{1}{2}NCF = 30°$; donc l'angle PNF sera aussi de $30°$. Le triangle PFN étant isoscèle, on aura $PF = FN = 1$; d'où $AP = 2$. On aura encore $Aa = \sqrt{2}$, d'où $aP = AP - Aa = 2 - \sqrt{2}$, $aF = aA - AF = \sqrt{2} - 1$, d'où l'on tire, d'après la construction,

$$2.\overline{AT}^2 = 2.\overline{aP}^2 = \overline{TQ}^2 = 2(2 - \sqrt{2})^2,$$

et

$$TQ = (2 - \sqrt{2})\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) = 2aF.$$

Donc la distance des deux centres T et Q est égale à la somme des rayons des deux cercles décrits des centres T, Q; donc ces cercles sont tangens. On prouverait la même chose à l'égard de deux quelconques des autres cercles.

Soit ensuite r le point où la ligne AR prolongée coupe le cercle décrit du centre R ; on aura

$$Ar = AR + Rr = aP + aF = PF = 1 = AB;$$

donc le point r se trouve sur la circonférence du cercle donné. Donc la distance des centres A et R est égale à la différence des rayons ; donc les cercles des centres R et A se touchent intérieurement. La même démonstration s'applique aux autres cercles.

Remarque I.

La solution de ce problème deviendrait très-facile, si on écartait la condition de le résoudre avec le compas seulement; car, après avoir divisé la surface du cercle donnée par deux diamètres perpendiculaires, en quatre secteurs, il ne faudrait que décrire dans chacun un cercle tangent aux deux côtés et à l'arc de cercle qui le termine, question facile à résoudre. On pourrait encore décrire quatre autres cercles qui toucheraient extérieurement le cercle donné aux points où celui-ci est touché par les quatre cercles, et qui se toucheraient deux à deux.

Problème LV. *Du centre A décrire un cercle qui touche les quatre qui résolvent le problème précédent.*

Solution. Cherchez une troisième proportionnelle aux droites
Fig. 146. FP, Fa, avec cette ligne prise pour rayon, et du centre A soit décrit un cercle ; ce sera le cercle cherché.

Démonstration. PF étant 1 et $Fa = \sqrt{2} - 1$, la troisième proportionnelle sera $3 - 2\sqrt{2}$. Or soit q le point où le rayon Ar coupe le cercle décrit du centre R, qr en sera le diamètre $= 2aF = 2\sqrt{2} - 2$: si de l'égalité $Ar = 1$, on retranche $2aF = 2\sqrt{2} - 2$, il restera $Aq = 3 - 2\sqrt{2}$ qui est, en effet, la troisième proportionnelle. Donc la somme des rayons Aq et qR, c'est-à-dire, $2 - \sqrt{2}$, sera la distance des centres A et $R = aP = 2 - \sqrt{2}$.

Problème LVI. *Décrire un cercle tangent à trois droites données qui ne soient pas toutes parallèles.*

La solution de ce problème n'a pas de difficulté.

Problème LVII. *Décrire un cercle tangent à deux droites données et à un cercle donné.*

Ce problème présente deux cas, savoir :

1°. Les deux cercles se touchent extérieurement.

2°. Ils se touchent intérieurement.

1°. Soit A le centre du cercle donné, et soient ZC, DB les droites données. Du centre A, abaissons sur ces lignes les perpendiculaires AZ, AD, et prenons sur leurs prolongemens, les parties ZX et DF égales entre elles et au rayon AK du cercle donné. Par les points X et F ainsi déterminés, menons les lignes XH, FG, parallèles aux droites ZC, DB; enfin, par le problème LI, décrivons un cercle qui passe par le point A, et qui soit tangent aux droites XH, FG; soient H et G les points de contact, et soit E le centre de ce cercle : je dis que si, du point E comme centre, et avec un rayon $EL = AE - AL$, on décrit un cercle, ce cercle sera tangent aux droites ZC, DB. Car, les angles ECZ, EBD sont droits, et les rayons EA, EH, EG étant égaux, ainsi que les parties CH, BG, il en résulte $EL = EC = EB$. Fig. 147, 1°.

2°. La construction à faire ne différera de la précédente qu'en ce qu'il faut prendre $AX = AZ - XZ$ et $AF = AD - DF$. Par ce moyen, le cercle cherché aura un rayon $EL = AE + AL$, d'où $AE = EL - AL$, condition sous laquelle deux cercles se touchent intérieurement. Fig. 147, 2°.

Problème LVIII. *Décrire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à une droite et à un cercle donnés de position.*

Définition. Nous appellerons *cordes semblables* dans deux cercles différens, les soutendantes d'arcs semblables, ou qui

ont même nombre de degrés. Les angles au centre correspondans à des arcs semblables, étant égaux, il s'ensuit évidemment que les cordes semblables sont entre elles comme leurs rayons. Réciproquement, si deux cordes sont entre elles comme les rayons des cercles auxquels elles appartiennent, ces cordes sont semblables. Nous pourrons donc regarder cette propriété des cordes semblables d'être proportionnelles aux rayons, comme équivalente à leur définition. Ces propositions sont faciles à démontrer, en prenant les cercles concentriques.

Lemme. I. *Si deux cercles se coupent, et que par l'un des points d'intersection et par le centre d'un des cercles, on mène une ligne droite, cette ligne ne passera point par le centre du second.*

Car si cette droite passait par les centres des deux cercles, les deux cercles auraient une tangente commune en leur point d'intersection; ils se toucheraient donc en ce point.

Lemme II. *Si deux cercles se coupent, et que par un des points d'intersection, on mène une droite qui coupe ces deux cercles, les cordes déterminées seront dissemblables.*

Fig. 148. En effet, soient A et H les centres de deux cercles qui se coupent en C et en E; menons les diamètres CHI, CAG de ces cercles; il suit du lemme précédent, que l'un de ces diamètres ne pourra passer par le milieu de l'autre. Par le point d'intersection C, menons d'une manière arbitraire la droite CBD; je dis que les cordes CB, CD sont dissemblables. Car, joignons BG, DI, et prolongeons les droites CG, DI jusqu'à leur rencontre en K: les angles CBG, CDK étant droits, les triangles CBG, CDK donneront

$$CB : CD :: CG : CK.$$

Il est donc impossible que l'on ait

$$CB : CD :: CG : CI :: \tfrac{1}{2} CG : \tfrac{1}{2} CI :: CA : CH.$$

Réciproquement, *si les cordes déterminées dans deux cercles*

par une sécante qui leur est commune, sont dissemblables, les deux cercles se coupent.

Car si les cercles se touchaient, les arcs MBE, NDF seraient semblables; il en serait de même des arcs BE DF; donc aussi les arcs MB et ND seraient semblables, ainsi que les cordes qui les soutendent, ce qui est contre l'hypothèse. Fig. 149.

Lemme III. *Si deux triangles semblables ont leurs bases parallèles et le sommet commun, les cercles circonscrits à ces triangles seront tangens l'un à l'autre, et ils auront pour point de contact le sommet commun.*

En effet, soient ABC, ADE ces deux triangles; soient O et P les centres des cercles circonscrits: menons les rayons OD, OE; PB, PC. Les angles DOE, BPC étant doubles de l'angle BAC, sont égaux, et les triangles ODE, PBC sont semblables. On a donc Fig 150.

$$DE : BC :: DO : BP;$$

mais

$$DE : BC :: AD : AB;$$

donc

$$AD : AB :: DO : BP.$$

Donc les cordes AD, AB sont semblables : or, d'après le lemme précédent, le contraire aurait lieu, s'il était possible que les cercles se coupassent; donc ces mêmes cercles sont tangens l'un à l'autre au point A.

Cela posé, occupons-nous de la solution du problème proposé.

1°. Si l'on veut que le cercle donné et le cercle demandé se touchent extérieurement, soient A le point donné, G le centre du cercle donné et PQ la droite donnée. Par le centre G l'on mènera la droite DGFC perpendiculaire à PQ; ensuite ayant joint DA, l'on prendra DH quatrième proportionnelle aux lignes DF, DC, DA; enfin, au moyen du problème L, on décrira un cercle qui passe par les points A et H, et qui soit tangent à la droite PQ; je dis Fig. 151.

qu'il le sera aussi au cercle donné. En effet, soit B le point de contact de la droite et du cercle, joignons DB qui coupe le cercle donné en E, menons la ligne EF. L'angle DEF étant droit, le quadrilatère BEFC est inscriptible (Récip. Liv. II, Prop. XI); on a donc $DC \times DF = DB \times DE$: or, en vertu de notre construction, $DC \times DF = DA \times DH$; donc $DA \times DH = DB \times DE$; donc (Récip. Liv. III, Prop. XXI) les quatre points A, H, E, B sont sur une même circonférence. De là il suit que le cercle décrit et le cercle donné ont le point E commun, et je dis qu'ils n'ont que ce point de commun. Car menons le diamètre BI du cercle décrit, il sera parallèle à la droite DC, puisque le cercle AHEB touche PC en B; et si l'on joint IE, l'angle IEB sera droit. Donc la ligne IEF est droite; donc les triangles EIB, EDF sont semblables; donc, en vertu du lemme III, les cercles donnés et décrits sont tangens extérieurement en E.

2°. Si l'on demande que ces deux cercles se touchent intérieurement, et que le cercle cherché soit intérieur au cercle donné, ce qui reviendra à décrire un cercle tangent à un cercle donné et à une corde de ce cercle, la construction et la démonstration précédentes resteront absolument les mêmes.

3°. Il en serait de même, si le cercle donné devait être intérieur au cercle décrit.

Problème LIX. *Décrire un cercle tangent à une droite et à deux cercles donnés.*

Nous distinguerons trois cas.

1°. Supposons que le cercle doive être extérieur aux deux cercles donnés, soient A et B les centres de ces cercles, et soit PQ la droite donnée. Du centre B, on abaissera la perpendiculaire BZ sur PQ, et prenant ZX égal au rayon du cercle donné A, on mènera par le point X la parallèle XR à PQ. Ensuite du point B comme centre et avec un rayon BG égal à la différence des rayons des cercles donnés, on

Fig. 152.

décrira un cercle; enfin, au moyen du troisième cas du problème précédent, on fera passer par le point A un cercle qui soit tangent à la droite XR et au cercle du rayon BG : le centre E de ce cercle sera aussi celui du cercle demandé. En effet, soient H et G les points de contact du cercle décrit avec la droite XR et le cercle du rayon BG, menons les rayons EA, EH, EG. Si du point E comme centre, et avec EL pour rayon, on décrit un cercle, il sera le cercle demandé : car, en vertu de notre construction, on a CH = GM = AL, et conséquemment EC = EM = EL : le cercle CLM touche donc la droite PQ en C, le cercle de AL en L, et à cause de EB = EG — GB = EA — LA + BM = EM + BM, il est tangent en M au cercle de BM.

2°. S'il faut que le cercle demandé soit tangent intérieurement à l'un des cercles et extérieurement à l'autre, la construction sera semblable à la précédente. Cependant, dans ce cas, l'on prendra BX = BZ — AL, et l'on aura soin de décrire le cercle BG avec un rayon égal à la somme des rayons des cercles proposés : ce qui donnera d'abord EA = EL — AL, première condition; mais on aura toujours EB = EM + BM, ce qui exprime la seconde. Il est bien entendu que le cercle EH sera décrit conformément au premier cas du problème précédent.

3°. Si l'on veut que deux cercles donnés soient tangens intérieurement au cercle cherché, la construction sera exactement la même que celle du cas précédent.

Problème LX. *Décrire un cercle qui passe par deux points donnés, et qui soit tangent à un cercle donné.*

Il est évident qu'il faut, pour que ce problème soit possible, que les deux points donnés soient tous deux au-dehors ou tous deux au-dedans du cercle donné. Ainsi ce problème donne lieu à deux cas :

1°. Si les points donnés B et D sont situés au-dehors du cercle donné KGEI dont le centre est A, on joindra ces deux points par Fig. 153.

la droite BD′, on mènera la ligne DFAG ; et, après avoir pris DH quatrième proportionnelle aux droites DB, DF, DG, on mènera par ce point ainsi déterminé la tangente HIC au cercle donné : enfin, par le point D et par celui de contact I, on fera passer une droite qui rencontrera le cercle donné en un point K, tel que le cercle décrit par les trois points K, B, D sera celui demandé. En effet, menons la droite BK, et soit E son point de rencontre avec le cercle donné ; joignons EI : je dis que les triangles KEI, KBD sont semblables. Car, en vertu de notre construction, $DB \times DH = DG \times DF = DK \times DI$; donc (Récip. Liv. III, Prop. XXI) le quadrilatère BHIK est inscriptible : d'où il suit que l'angle $BKD = IHD$. Or, les triangles KBD, IHD ayant l'angle BDK commun, nécessairement l'angle HID ou KIC est égal à l'angle KBD : de plus, les angles KIC, KEI sont égaux, comme ayant pour mesure la moitié du même arc KI : donc l'angle $KEI = KBD$; donc les triangles KEI, KBD sont semblables, et par conséquent (Prob. LVIII, Lem. III) les cercles qui leur sont circonscrits, sont tangens en K.

Fig. 154. 2°. Si les points donnés B et D sont au-dedans du cercle donné KGEI, on prolongera la droite BD de DH, quatrième proportionnelle à DB, DF, DG, ensorte que $DB \times DH = DG \times DF$; et il est facile de voir que le point H ne peut tomber qu'au dehors du cercle donné ; car on a

$$DG \times DF = DK' \times DH' :$$

or si on remplace DK′ par $DB < DK'$, il faudra, par compensation, au facteur DH′, substituer $DH > DH'$. Cela posé, la construction se continuera comme ci-dessus.

Remarque.

Comme par le point H on peut mener deux tangentes au cercle donné, on aura toujours deux points tels que I, conséquemment deux lignes telles que DIK, et deux cercles tangens passant par les points D et B.

Problème LXI. *Décrire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à deux cercles donnés.*

Nous donnerons deux solutions de cette question, dont la première est fondée sur les deux lemmes suivans :

Lemme I. *Étant donnés deux cercles, trouver sur la ligne qui joint leurs centres, un point, tel qu'en menant à volonté par ce point une sécante commune aux deux cercles, les cordes interceptées soient semblables.* Fig. 134.

Ce point n'est autre que celui qui termine la tangente commune aux deux cercles. En effet, supposons le problème résolu, et soient AB, A'B' les cordes semblables déterminées par AR' qui rencontre en R' la ligne qui joint les centres : il suit de là (Prob. LVIII, défini) que les angles AOB, A'O'B' sont égaux, et que les triangles isoscèles AOB, A'O'B sont semblables; donc les rayons AO, A'O' sont parallèles. Cela posé, les triangles semblables R'AO, R'A'O' donnent une proportion de laquelle on déduit $R'O = \frac{OO' \times AO}{AO \mp A'O'}$. Or soit R le point où aboutit la tangente commune aux deux cercles; on a aussi (Prob. XXXXVIII) $RO = \frac{OO' \times OT}{OT \mp O'T'} = \frac{OO' \times AO}{AO \mp A'O'}$.

Lemme II. *Si du point R, déterminé d'après le lemme précédent, on mène une sécante quelconque RB'A'BA commune aux deux cercles, je dis qu'on aura $RD' \times RC = RB' \times RA$.* Car si l'on mène les cordes BD, B'D', il est facile de voir qu'elles seront parallèles. Alors les triangles semblables RBD, R'B'D' donneront Fig. 134.

$$RB : RD :: RB' : RD' :$$

or,

$$RB : RD :: RC : RA;$$

donc

$$RB' : RD' :: RC : RA;$$

d'où l'on tire

$$RD' \times RC = RB' \times RA.$$

On aura aussi

$$RC' \times RD = RA' \times RB.$$

Cela posé, venons à la première solution de la question proposée. Il peut se présenter trois cas : car, ou l'on voudra que le cercle cherché enveloppe les cercles donnés, ou qu'il soit intérieur à chacun de ces cercles, ou enfin, que l'un de ces mêmes cercles lui soit intérieur et l'autre extérieur. La solution est la même pour ces trois cas : nous nous bornerons donc à en traiter un, le premier, par exemple.

Soient K et L les centres des cercles donnés, soit I le point donné. On cherchera, d'après le lemme I, sur la droite KL qui joint les centres, un point M tel qu'en menant par ce point une sécante quelconque commune aux deux cercles, les cordes interceptées soient semblables. On joindra MI, Fig. 155. et, après avoir pris MN quatrième proportionnelle aux lignes MI, MD, MH, on décrira, au moyen du problème précédent, un cercle qui passe par les points N, I, et qui soit tangent au cercle dont le centre est K ; je dis que ce cercle sera pareillement tangent à celui dont le centre est L. En effet, soit B le point de contact du cercle décrit et du cercle K ; menons la droite BCFGM qui rencontre en B et C le premier cercle et en F et G le second. En vertu de notre construction, on a

$$MN \times MI = MD \times MH :$$

or, suivant le lemme II,

$$MD \times MH = MB \times MG ;$$

donc

$$MN \times MI = MB \times MG ;$$

donc les quatre points B, G, N, I sont sur une même circonférence. De là il suit que le cercle décrit et le cercle L ont le point G commun, et il reste à démontrer qu'ils n'ont que ce point commun. En effet, puisque les cercles BDC, BIN sont tangens en B, les cordes BC, BG sont semblables

(Prob. LVIII, Lemme III); mais il en est de même des cordes BC, GF, en vertu de notre construction; donc les cordes BG, GF sont semblables; donc (Prop. LVIII, Lem. II et III), les cercles EFG, BGI sont tangens en G.

Passons à la seconde solution.

Soient A le point donné, OB, O'C les rayons des cercles donnés. Supposons le problème résolu, et soit ABC le cercle cherché tangent en B et C aux cercles donnés. Si l'on mène les droites ABE, ACG par A, et les points de tangence B et C, et la droite DBCF, les trois triangles ABC, BDE, CFG seront semblables (Prob. LVIII, Lem. III). Si, par les points E et G, on mène les tangentes EH, GI aux cercles des rayons OB, O'C, on aura Fig. 156.

$$\text{angle AEH} = \text{angle BDE} = \text{angle BCA},$$
$$\text{angle AGI} = \text{angle CFG} = \text{angle ABC}.$$

D'où il suit, 1°. que les triangles AGI, AEH sont semblables au triangle ABC; 2°. que

$$\text{angle AIG} = \text{angle ACB} = \text{angle AEH};$$

qu'ainsi les tangentes GI, HE sont parallèles. Si, du point A on mène aux cercles des rayons OB, O'C des tangentes que nous désignerons par t et t', on aura

$$\left.\begin{array}{l} t'^2 = AC \times AG = AB \times AI \\ t^2 = AB \times AE \end{array}\right\} \text{d'où } \left\{ \frac{t'^2}{t^2} = \frac{AI}{AE}. \right.$$

Si donc on prend, à partir du point A, sur la droite AO, une longueur AR qui soit à AO dans le rapport de t'^2 à t^2, et que du point R, comme centre, avec un rayon RI qui soit aussi à OE dans le rapport de t'^2 à t^2, ou de AR à AO, on décrive le cercle mIn, ce cercle sera tangent à IG, parce que RI est parallèle à la droite OE perpendiculaire à la parallèle HE à GI. Il suffira donc de mener une tangente commune aux deux cercles des rayons RI, O'C: si l'on joint

ensuite le point A aux points de tangence G et I, les droites AG, AI donneront les points de contact cherchés C et B.

Problème LXII. *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Il est facile de voir que ce problème présente quatre cas différens ; car on peut demander, ou que le cercle cherché renferme ces trois cercles donnés, ou qu'il n'en renferme que deux, ou qu'il n'en renferme qu'un, ou enfin qu'il les laisse tous trois au-dehors.

Fig. 157. Dans le premier cas, soient O, O', O'' les centres des trois cercles donnés, OP, O'Q, O''R leurs rayons. Du point O comme centre et avec un rayon $=$ OP $-$ O''R, on décrira un cercle : on en décrira un second du point O' comme centre et avec un rayon $=$ O'Q $-$ O''R : ensuite, au moyen du problème précédent, on fera passer par O'' un cercle qui soit tangent aux deux derniers cercles décrits. Le centre C de ce cercle sera évidemment celui du cercle cherché.

La solution des trois autres cas ne présentant aucune difficulté, nous nous dispenserons de les rapporter.

Nous allons résoudre autrement le même problème.

Lemme I[er]. *Le sinus de tout angle inscrit dans un cercle quelconque, est égal à la corde sur laquelle il est appuyé, divisée par le diamètre.*

Fig. 158. Sur l'hypoténuse BC du triangle BAC rectangle en A, soit décrite une circonférence ; elle passera par A. Si l'on fait le diamètre BC $=1$, le côté AB devient le sinus de l'angle ACB : car si, du centre O, on mène à AC la parallèle OH, H sera le milieu de AB : donc en observant que pour passer du sinus pour le rayon 1 au sinus BH du même angle pour le rayon BO, il faut diviser BH par BO, on aura

$$\sin BOH \text{, ou } \sin BCA = \frac{BH}{BO} = \frac{AB}{BC} = AB\,;$$

on aura aussi sin AFB $=$ AB. Or dans différens cercles, les

cordes des arcs d'un même nombre de degrés, sont proportionnelles aux diamètres; donc, etc.

Lemme II. *Dans un quadrilatère qui a deux angles droits aux extrémités d'une même diagonale, cette diagonale est égale à l'autre multipliée par le sinus de l'angle opposé à la première.*

Les angles en F et G étant droits, la circonférence décrite sur AD comme diamètre, passera par les quatre sommets, et on aura, d'après le lemme précédent,

$$\sin FAG = \frac{FG}{AD}, \quad \text{d'où} \quad FG = AD.\sin FAG.$$ Fig 159.

Occupons-nous de la solution du problème.

Soient A, B, C les centres des cercles donnés, X celui du cercle cherché. Formons le triangle ABC et joignons X aux centres A, B, C; du même point X menons sur AB, AC les perpendiculaires XE, XF, et menons la diagonale EF. Fig. 160.

Si l'on conçoit sur BX, comme diamètre, une circonférence, elle passera par les points E, F, et d'après le lemme II, on aura

$$EF = BX \sin ABC,$$

et, après avoir élevé au quarré,

$$\overline{EF}^2 = \overline{BX}^2 \sin^2 ABC.$$

Dans le triangle EBF, on a

$$\overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 - 2EB.BF \cos ABC.$$

Cela posé, soient x le rayon de la circonférence cherchée, A, B, C les rayons des circonférences qui ont leurs centres en A, B, C; a, b, c les côtés du triangle ABC, respectivement opposés aux angles A, B, C, et enfin m et n le si-

nus et le cosinus de l'angle connu ABC. L'équation résultante de l'égalité des deux valeurs de $\overline{EF}^2$ deviendra

$$(B+x)^2m^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BF}^2 - 2EB.BF.n,$$

et on remarquera qu'en remplaçant BX, qui est la distance des centres B et X, par la somme des rayons $B+x$, on dit que les cercles B et X se touchent. Traduisons EB et BF. Les triangles rectangles BEX, EAX donnent

$$\left.\begin{aligned}\overline{BE}^2 + \overline{EX}^2 = \overline{BX}^2\\ \overline{EA}^2 + \overline{EX}^2 = \overline{AX}^2\end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{ \overline{BE}^2 - \overline{EA}^2 = \overline{BX}^2 - \overline{AX}^2; \right.$$

écrivant pour AE sa valeur $AB - BE = c - EB$, et pour AX sa valeur $A+x$, qui exprime que les cercles A et X se touchent, on trouve

$$2EB.c - c^2 = B^2 - A^2 + 2(B-A)x,$$

c'est-à-dire,

$$EB = \frac{B^2 - A^2 + c^2 + 2(B-A)x}{2c};$$

on obtiendrait de la même manière,

$$BF = \frac{B^2 - C^2 + a^2 + 2(B-C)x}{2a},$$

et dans cette évaluation de BF, on introduit, par la substitution de $C+x$ pour CX, la condition que les cercles C et X se touchent. Reportant ces valeurs de EB et BF dans l'équation trouvée ci-dessus, on a celle-ci :

$$\begin{aligned}(B+x)^2.m^2 = &\left(\frac{B^2 - A^2 + c^2 + 2(B-A)x}{2c}\right)^2\\ &+\left(\frac{B^2 - C^2 + a^2 + 2(B-C)x}{2a}\right)^2\\ &- n\,\frac{\{B^2-A^2+c^2+2(B-A)x\}\{B^2-C^2+a^2+2(B-C)x\}}{2ac},\end{aligned}$$

qui ne monte qu'au second degré.

Si les cercles touchés ont tous trois même rayon, ou si $A = B = C$, l'équation précédente se change dans celle-ci :

$$4m^2x^2 + 8Bm^2x + 4m^2B^2 + 2nac - a^2 - c^2 = 0,$$

laquelle étant résolue, donne

$$x = -B \pm \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - 2nac}{4m^2}} = -B \pm \frac{b}{2m};$$

d'où on tire, en prenant le signe supérieur,

$$m = \frac{b}{2(x+B)}.$$

En effet, si du centre X on mène une perpendiculaire Xx à AC, cette perpendiculaire divisera AC en deux parties égales en x, et on aura, d'après le lemme Ier,

$$\sin xXC = \frac{xC}{XC} = \frac{b}{2(x+b)};$$

ainsi du centre C avec un rayon $x + B = \frac{b}{2m}$, on décrira un arc qui coupera la perpendiculaire en un point X, lequel sera le centre du cercle cherché.

Remarque.

Sur ce problème et les précédens, on peut consulter *l'Arithmétique universelle de Newton*, au titre : *De la manière de mettre les questions de Géométrie en équation.*

Théorème XXIII. *Soit ABC un triangle quelconque inscrit dans un cercle : si par chacun des sommets on mène une* Fig. 161. *tangente prolongée jusqu'à la rencontre des côtés opposés en* a, b, c, *les trois points* a, b, c *seront en ligne droite.*

En effet, le triangle ABa donne

$$AB : Ba :: \sin AaB : \sin BAa,$$

et le triangle ACa donne

$$\mathrm{C}a : \mathrm{AC} :: \sin \mathrm{CA}a : \sin \mathrm{A}a\mathrm{C} :$$

multipliant ces deux proportions par ordre, et observant que $\sin \mathrm{A}a\mathrm{B} = \sin \mathrm{A}a\mathrm{C}$, $\sin \mathrm{BA}a = \sin \mathrm{ACB} = \sin \mathrm{C}$, $\sin \mathrm{CA}a = \sin \mathrm{ABC} = \sin \mathrm{B}$, on aura

$$\mathrm{AB} . \mathrm{C}a : \mathrm{B}a . \mathrm{AC} :: \sin \mathrm{B} : \sin \mathrm{C}.$$

On trouvera de la même manière

$$\mathrm{CA} . \mathrm{B}c : \mathrm{CB} . \mathrm{A}c :: \sin \mathrm{A} : \sin \mathrm{B},$$

et

$$\mathrm{BC} . \mathrm{A}b : \mathrm{BA} . \mathrm{C}b :: \sin \mathrm{C} : \sin \mathrm{A}.$$

Multipliant ces trois proportions, et supprimant les facteurs communs, on aura entre les six segmens des côtés A, B, C, la relation suivante

$$\mathrm{A}b . \mathrm{C}a . \mathrm{B}c = \mathrm{A}c . \mathrm{B}a . \mathrm{C}b,$$

laquelle, d'après le théorème XIV, ne peut avoir lieu, sans que les trois points *a*, *b*, *c* ne soient en ligne droite. On remarquera qu'ici la transversale *cba* tombe au-dehors du triangle BAC, et qu'elle est analogue à *b'c'a* du théorème que nous venons de citer.

Fig. 162. Théorème XXIV. *Soit le quadrilatère inscrit ABCD, si l'on prolonge les côtés opposés AB, CD jusqu'à leur rencontre en* m, *les autres côtés opposés AD, BC jusqu'à leur rencontre en* n, *et qu'on mène par les extrémités des diagonales AC, BD, les tangentes A*p *et C*p, *B*q *et D*q, *les quatre points* m, n, p et q *sont en ligne droite.*

Je dis d'abord que les trois points *m*, *n*, *p* sont en ligne droite. En effet

le triangle A*m*D	......	$\mathrm{AD} : \mathrm{D}m :: \sin \mathrm{A}m\mathrm{D} : \sin \mathrm{DA}m$
le triangle B*m*C	......	$\mathrm{C}m : \mathrm{BC} :: \sin \mathrm{CB}m : \sin \mathrm{B}m\mathrm{C}$
le triangle AC*p*	donne	$\mathrm{AC} : \mathrm{C}p :: \sin \mathrm{A}p\mathrm{C} : \sin \mathrm{CA}p$
le triangle A*rp*	......	$rp : \mathrm{A}r :: \sin r\mathrm{A}p : \sin \mathrm{A}pr$
le triangle CD*n*	......	$\mathrm{D}n : \mathrm{CD} :: \sin \mathrm{DC}n : \sin \mathrm{D}n\mathrm{C}$
le triangle C*rn*	......	$\mathrm{C}r : rn :: \sin \mathrm{C}nr : \sin n\mathrm{C}r.$

Multipliant toutes ces proportions, et observant, pour réduire, qu'on a

$$\sin AmD = \sin BmC\,;\ \sin ApC = \sin Apr\,;\ \sin Cnr = \sin DnC\,;$$
$$\sin DCn = \sin DAm\,;\ \sin CBm = \sin CAp\,;$$

que de plus

$$AD : BD : \sin DBA : \sin BAD,\quad BC : BD :: \sin BDC : \sin BCD\,;$$

d'où

$$\frac{AD\,.\,\sin BAD}{\sin DBA} = \frac{BC\,.\,\sin BCD}{\sin BDC},$$

et conséquemment

$$AD : BC :: \sin DBA : \sin BDC :: \sin rAp : \sin nCr,$$

on trouvera

$$AC\,.\,Cr\,.\,Cm\,.\,rp\,.\,Dn = CD\,.\,Ar\,.\,Dm\,.\,Cp\,.\,rn\ \ldots\ldots(A).$$

Mais

$$AC : CD :: \sin ADC : \sin CAD$$
$$Cr : Ar :: \sin CAD : \sin ACr\,;$$

donc puisque $\sin ACr = \sin ADC$, l'un de ces angles étant supplémentaire de l'autre, on a

$$AC\,.\,Cr = CD\,.\,Ar :$$

divisant l'équation (A) par celle-ci, il restera

$$Cm\,.\,rp\,.\,Dn = Dm\,.\,Cp\,.\,rn\ldots\ldots$$

équation entre les segmens des triangles CDr, laquelle, en vertu du théorème XIV, ne peut avoir lieu sans que les trois points m, n, p ne soient en ligne droite.

Puisque le point de concours des tangentes qui passent par les extrémités A et C de la diagonale AC, se trouve sur la droite mn, le point de concours des tangentes qui passent par les extrémités B et D de l'autre diagonale BD doit, par la

même raison, se trouver aussi sur cette droite *mn*. Donc les quatre points *m*, *n*, *p*, *q* sont placés sur une même droite.

Ce théorème et le précédent sont encore dus à *M. Carnot*; nous les avons tirés d'un excellent ouvrage ayant pour titre : *Memoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques, pris dans l'espace; suivi d'un Essai sur la Théorie des Transversales.*

Théorème XXV. *Soient A, B, C les centres de trois cercles tracés dans un même plan : concevons qu'on mène des droites qui touchent ces cercles deux à deux extérieurement,*
Fig. 163. *et soient* a, b, c *les points où ces tangentes coupent les lignes des centres prolongées, c'est-à-dire que* a *soit le point où la ligne des centres BC est rencontrée par la tangente extérieure aux cercles B et C, et ainsi des autres; les trois points* a, b, c *se trouveront nécessairement en ligne droite.*

En désignant par A, B et C les rayons des cercles dont les centres sont A, B, C, on a la proportion

$$A : B :: Ac : Bc,$$
$$B : C :: Ba : Ca,$$
$$C : A :: Cb : Ab :$$

multipliant ces trois proportions et réduisant, on trouve

$$Ab \cdot Ca \cdot Bc = Ac \cdot Ba \cdot Cb;$$

relation qui ne peut avoir lieu, d'après le théorème XIV, sans que les trois points ne soient en ligne droite.

Théorème XXVI. *Soient les tangentes intérieures TT′,* tt′, *ττ′, et soient* b′, a′, c′ *les points dans lesquels elles coupent respectivement les lignes des centres :*

Fig. 163. 1°. *Les trois transversales A*a′, *B*b′, *C*c′ *se coupent en un même point D.*

2°. *Les points* b′a′c; c′a′b; c′b′a *sont en ligne droite.*

1°. En désignant par A, B, C les rayons des cercles dont

les centres sont A, B, C, on a les proportions

$$A : B :: Ac' : Bc',$$
$$B : C :: Ba' : Ca',$$
$$C : A :: Cb' : Ab'.$$

Multipliant ces trois proportions et réduisant, on obtient celles-ci :

$$Ac' . Ba' . Cb' = Ab' . Bc' . Ca',$$

ce qui prouve (Théor. XV) que si l'on mène les trois transversales Aa', Bb', Cc', elles se croiseront toutes en un même point D.

2°. On a

$$A : B :: Ac : Bc;$$
$$A : B :: Ac' : Bc',$$

d'où résulte la proportion

$$Ac : Bc :: Ac' : Bc'.$$

Or on a vu (Théor. XVIII) que si D est le point de concours de trois droites Aa', Bb', Cc', menées des sommets A, B, C d'un triangle ABC aux côtés opposés, la ligne $b'a'$ prolongée jusqu'à la rencontre du côté opposé AB, la coupera en un point c qui doit donner entre les segmens Ac, Bc, Ac', Bc' la proportion précédente. En effet, le triangle ADB est l'analogue du triangle FCG (Théor. XVIII), ACB l'analogue de FAG, la ligne $Ac'Bc$ celle de $GhFk$, et $b'a'c$ celle de DBk. Fig. 164.

Dans mon Traité d'Analyse géométrique, j'ai résolu autrement ces questions.

Théorème XXVII. *Soit un demi-cercle AB, soit C un point quelconque de son diamètre; construisons sur les segmens AC, CB les deux demi-cercles AGC, CMB; du point C élevons CD perpendiculaire sur AB, et décrivons des cercles GFE,* Fig. 165.

MLN qui touchent de part et d'autre cette perpendiculaire et les arcs des demi-cercles; je dis que ces deux cercles seront égaux entre eux.

Lemme. *Les deux cercles AEB, CED se touchant en E, si l'on mène le diamètre CD parallèle à AB, et qu'on joigne les points B et D et le point de contact E, la ligne BDE sera droite.*

La figure offre deux cas.

166. 1°. F et G étant les centres des cercles, la ligne FG ira au point de contact E; soit DH parallèle à GF : on aura

$$HF = GD = GE;$$

d'ailleurs $FB = FE$; donc $HB = FG$. Mais $EGD = EFB$; donc $EGD = DHB$, donc $EDG = DBF$. Si à chacun de ces angles, on ajoute GDB, on aura

$$EDG + GDB = DBF + GDB:$$

or la somme $DBF + GDB$ valant un angle droit, il en est de même de la somme $EDG + GDB$; donc la ligne EDB est droite.

66. 2°. Les diamètres DC, AB étant toujours parallèles, la droite menée par les centres G et F, passe par le point de contact E, et on a l'angle $DGE = EFB$; d'ailleurs, à cause des triangles isoscèles DGE, EFB, l'angle $GDE = DEG = FEB = FBE$; donc

$$DEG + BEG = FEB + BEG.$$

Mais $FEB + BEG = 2$ angles droits, donc il en est de même de $DEG + BEG$; donc BED est une ligne droite.

Passons à la démonstration du théorème.

Supposons que le cercle FGE touche la perpendiculaire CD en E, la grande demi-circonférence en F, et la moyenne en G; le diamètre HE sera parallèle à AB; joignons FH,

HA ; la ligne AF sera droite (Lem.), et les droites AF, CE se rencontreront en D. Joignons aussi FE, EB ; la ligne FEB sera droite, parce que l'angle AEB ayant pour mesure la moitié de la demi-circonférence plus la moitié de l'arc FI, et l'angle AEF ayant pour mesure la moitié de l'arc AF plus la moitié de l'arc INB, il s'ensuit que les angles AEF et AEB valent deux angles droits. Cette droite BEF sera perpendiculaire sur AD en F. Menons HG, GC; la ligne HC sera droite (Lemme.). Joignons EG, GA, la ligne EGA sera droite ; prolongeons cette droite vers I, et tirons BI ; la droite BI sera perpendiculaire sur AI, et elle ira passer par D. En effet, DC, BF étant deux perpendiculaires abaissées des angles B et D sur les côtés opposés, et AEI une perpendiculaire abaissée du troisième angle sur BI, la ligne BID doit être le troisième côté du triangle (Recueil. de Théor. et Prob., Théor. III). Mais les deux angles AGC, AIB étant droits, les droites DB et HC sont parallèles, et on a

$$AD : DH :: AB : BC.$$

D'ailleurs les droites AC, HE sont parallèles ; donc

$$AD : DH :: AC : HE.$$

De ces deux proportions on déduit celle-ci :

$$AB : BC :: AC : HE ;$$

et conséquemment

$$AC \times CB = AB \times HE.$$

On démontrera de la même manière que

$$AC \times CB = AB \times LK,$$

LK étant le diamètre du cercle LMN tangent en N, M et L aux deux circonférences et à la droite DC. Donc les diamètres des cercles FHGE et LMKN sont égaux.

Remarque.

On pourrait se proposer d'assigner les centres et le rayon de ces cercles tangens.

Questions à résoudre.

Nous invitons les élèves à s'exercer sur les énoncés suivans qui appartiennent à la Partie précédente de ce Recueil.

Problème. *Trois droites étant données de position dans un plan, tracer une transversale qui soit coupée par ces droites, en deux parties, dans un rapport donné.*

Problème. *Quatre droites étant données de position dans un plan, tracer une transversale qu'elles divisent en trois parties qui soient entre elles comme trois lignes données.*

Problème. *Trois droites étant données de position dans un plan, trouver le point d'où menant trois perpendiculaires à à ces droites, ces perpendiculaires soient entre elles comme trois lignes données.*

Problème. *Inscrire dans un cercle donné et lui circonscrire un triangle d'un contour déterminé.*

Fig. 167. Théorème. *Soient un demi-cercle AMB et une sécante quelconque DE; si des points A et B, on lui mène deux perpendiculaires AD, BE, le segment DF sera égal à GE.*

Fig. 167. Théorème. *Soient un demi-cercle AMB et une ligne KL qui le touche en T; si des points A et B on lui mène deux perpendiculaires AK, BH, la ligne TK sera égale à TH.*

Fig. 168. Théorème. *Soient deux demi-cercles ABC, DEF, et soient $AD = CF$; si du point C on mène une sécante quelconque CGEB, et du même point une tangente CTK, on aura* 1°. $CG = EB$; 2°. $CT = TK$.

Fig. 169. Théorème. *Soient deux cercles ABCA, DEFD, et $AD = FC$; si par F on mène une sécante quelconque BEFG, on aura $BE = FG$.*

Fig. 170. Théorème. *Soient deux demi-cercles ABC, DEF et*

FG = AD; si par C on mène une sécante quelconque CKEB, et une tangente CTM, et par G deux perpendiculaires, l'une GH à la sécante, et l'autre GL à la tangente, on aura, 1°. BE = KH; 2°. MT = TL.

Problème. *Un demi-cercle étant donné, et un point D sur son diamètre, faire passer par D un demi-cercle DTF tel, que si du point C on lui mène une tangente CTB, on ait BT = AD.* Fig. 171.

Théorème. *Soient deux demi-cercles ABC, DEF et AG = CD; si par F on mène une sécante quelconque FB, et une tangente FT, et du point G deux perpendiculaires, l'une GH à la sécante, l'autre GK à la tangente, on aura 1°. HB = KE; 2°. KT = TL.* Fig. 171.

Théorème. *Soient deux cercles qui se touchent au point A, soit décrit un autre cercle qui touche l'un d'eux en B, et qui coupe l'autre dans les points C et D; si des points C et D on mène deux droites à l'un quelconque des points de la circonférence AEBF, le plus grand de ces angles sera l'angle CAD, et le plus petit sera l'angle CBD.* Fig. 172.

Problème. *Etant donné un point B sur la circonférence d'un cercle, trouver deux autres points L et M, tels, que le triangle BLM soit équilatéral, et qu'il touche le cercle par le côté LM, dans le milieu E de ce côté.* Fig. 173.

Problème. *Étant donné un triangle ABC et deux circonférences concentriques, construire un triangle A′B′C′, qui ait deux de ses sommets A′ et B′ sur la grande circonférence, et le troisième C′ sur la petite, et qui soit équiangle au triangle donné.*

Problème. *Étant données deux circonférences C et C′ qui se coupent en E et F, puis un point A sur C et un point B sur C′, mener la corde AH dans la circonférence C, et la corde BD dans la circonférence C′, sous la condition que les extrémités H et D de ces cordes soient sur une même autre circonférence, et qu'elles se coupent sous un angle donné.*

Des Périmètres et des Aires de quelques Polygones réguliers. Quadrature de quelques espaces limités par des arcs de cercle et des droites.

Fig.174. Théorème XXVIII. *Le côté du triangle équilatéral circonscrit, est égal $2R\sqrt{3}$, R étant le rayon du cercle inscrit.*

Le triangle FQR dans lequel l'angle FQR est divisé en deux parties égales par QE, donne (Géom., Liv. III, Prop. XXXI, Théor.).

$$QR \cdot QF = FO \cdot OR + \overline{QO}^2$$

Le triangle FPR donne par la même raison,

$$PR \cdot PF = FO \cdot OR + \overline{PO}^2$$

Ajoutant ces deux égalités, il vient celle-ci,

$$PR \cdot PQ = 2FO \cdot OR + \overline{2OQ}^2,$$

ou

$$\overline{QR}^2 = \overline{4FO}^2 + \overline{8FO}^2,$$

en observant que $OR = 2FO$; donc

$$\overline{QR}^2 = 12\overline{R}^2, \text{ d'où } QR = R\sqrt{12}.$$

Cette proposition a déjà été démontrée, Théorème II, Corol. de ce Recueil.

Théorème XXIX. *La troisième proportionnelle aux périmètres du triangle équilatéral et du quarré circonscrits à un cercle, est égale à la troisième proportionnelle aux périmètres du triangle équilatéral et du quarré inscrits à ce même cercle.*

En effet, désignons par R le rayon du cercle ; le côté du triangle équilatéral circonscrit sera, d'après le théorème pré-

cédent, $R\sqrt{12}$ ou $2R\sqrt{3}$; donc le périmètre du triangle équilatéral circonscrit sera $6R\sqrt{3}$. Le périmètre du quarré circonscrit est évidemment $8R$: donc la troisième proportionnelle à ces deux périmètres, est $\frac{32R}{3\sqrt{3}}$. Or (Géom.; Liv. IV, Prop. IV, Schol.) le côté du triangle équilatéral inscrit étant $R\sqrt{3}$, le périmètre de ce triangle est par conséquent $3R\sqrt{3}$; d'ailleurs (Géom., Liv. IV, Prop. III, Schol.) le côté du quarré inscrit étant $R\sqrt{2}$, son périmètre sera $4R\sqrt{2}$; donc la troisième proportionnelle à ces deux périmètres, est $\frac{32R}{3\sqrt{3}}$. Ces deux troisièmes proportionnelles sont les mêmes. Donc, etc.

Théorème XXX. *L'aire troisième proportionnelle aux aires du triangle équilatéral et du quarré circonscrits à un cercle, est egale à l'aire troisième proportionnelle aux aires du triangle équilatéral et du quarré inscrits à ce cercle.*

Car le côté du triangle équilatéral circonscrit étant, d'après le théorème précédent, $2R\sqrt{3}$, et sa hauteur $3R$, son aire sera $3R^2\sqrt{3}$; l'aire du quarré circonscrit sera $4R^2$: la troisième proportionnelle à ces deux aires est $\frac{16R^2}{3\sqrt{3}}$. Or le côté du triangle équilatéral inscrit, étant $R\sqrt{3}$, et la hauteur $\frac{3}{2}R$ (Géom., Liv. IV, Prop. IV, Sch., et Liv. I, Prop. XXXII) l'aire sera $\frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$; pareillement l'aire du quarré inscrit est $2R^2$, et l'aire troisième proportionnelle à ces deux aires, est encore $\frac{16R^2}{3\sqrt{3}}$; donc, etc.

Théorème XXXI. *L'aire troisième proportionnelle à celles de l'hexagone et de l'octogone inscrits, est égale à l'aire troisième proportionnelle à celles du triangle équilatéral et du quarré inscrits, et conséquemment aux aires du triangle équilatéral et du quarré circonscrits.*

Car l'aire de l'hexagone inscrit sera $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, celle de l'octogone sera $2R^2\sqrt{2}$ (Liv. IV, Prop. XIII); la troisième proportionnelle à ces deux aires, est $\frac{16R^2}{3\sqrt{3}}$, qui est celle que nous avons trouvée dans le théorème précédent.

Théorème XXXII. *L'aire du dodécagone inscrit, est égale à trois fois le quarré du rayon.*

Car l'aire de l'hexagone circonscrit est donnée par la formule

$$B' = \frac{2A \times B}{A + A'},$$

où A, B sont les aires des triangles équilatéraux inscrit et circonscrit, et A' l'aire de l'hexagone inscrit. Or $A = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$,

$B = 3R^2\sqrt{3}$, $A' = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; donc

$$B' = \frac{\frac{6}{4}R^2\sqrt{3} \times 3R^2\sqrt{3}}{\frac{9}{4}R^2\sqrt{3}} = \frac{6R^2}{\sqrt{3}} = 2R^2\sqrt{3},$$

aire de l'hexagone circonscrit. L'aire du dodécagone inscrit sera donnée par

$$A' = \sqrt{A \times B},$$

où A et B sont les aires des hexagones inscrit et circonscrit, ensorte que

$$A' = \sqrt{\frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \times 2R^2\sqrt{3}} = 3R^2.$$

Donc, etc.

Corollaire. Le côté du triangle équilatéral, étant $R\sqrt{3}$, son quarré sera $3R^2$; c'est-à-dire, égal à l'aire du dodécagone inscrit.

Remarque.

Parmi les polygones inscrits, le quarré et le décagone sont les seuls dont les aires soient au quarré du rayon dans le rapport de deux nombres entiers; et parmi les polygones circonscrits, le quarré est le seul dont l'aire jouisse de cette propriété.

Théorème XXXIII. *Le quarré du côté du pentagone régulier inscrit dans un cercle, est égal au quarré du côté de l'hexagone, plus au quarré du décagone.*

Soit O le centre du cercle circonscrit à ces trois polygones réguliers. Soit AB le côté du pentagone : si nous abaissons sur ce côté le rayon perpendiculaire OC, BC sera le côté du décagone, et il faudra prouver que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AO}^2$. A cet effet, abaissons du centre O une perpendiculaire O*b* sur BC, joignons CI : les triangles BCI, ABC sont semblables, parce que le point I étant également éloigné des points B et C, le triangle CIB est isoscèle comme le triangle ABC; et d'ailleurs l'angle en B est commun : ces triangles donnent donc Fig. 175.

$$BI : BC :: BC : BA,$$

d'où l'on tire

$$AB \times BI = \overline{BC}^2 \ldots\ldots (1).$$

Les triangles AOB, AOI sont aussi semblables, parce que l'angle AOB a pour mesure $\frac{1}{5}\pi$, π étant la circonférence, l'angle AIO a pour mesure

$$\frac{AKN' + BN}{2} = \frac{N'ACN - AC}{2} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{10}\pi}{2} = \frac{1}{5}\pi,$$

et que d'ailleurs l'angle BAO est commun; donc

$$AB : AO :: AO : AI,$$

d'où résulte

$$AB \times AI = \overline{AO}^2 \ldots\ldots (2).$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et (2), on trouve

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AO}^2.$$

Nous croyons ne devoir pas terminer cet article, sans parler de quelques espaces mixtilignes ou curvilignes ayant des aires équivalentes à celles d'autres espaces terminés par des lignes droites. Il ne faut pas chercher, dans ce que nous allons dire, une méthode analogue à la *méthode des quadratures :* tout se réduit ici à ajouter à une aire des aires égales, ou à lui ajouter et à en retrancher la même aire.

Nous parlerons d'abord des *Lunulles d'Hyppocrate de Chio.*

Théor. XXXIV. *Si sur les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A, on décrit des demi-circonférences BnmC, CMA, BNA, on aura aire CmAM + aire BnAN = aire BAC.*

Fig. 176. Les aires des demi-cercles étant comme les quarrés des diamètres, on a

$$CmnBC : CMAC : BNAB :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 : \overline{BA}^2,$$

d'où

$$CmnBC : CMAC + BNAB :: \overline{BC}^2 : \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2;$$

donc, à cause de $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{BA}^2$, on aura

$$CmnBC = CMAC + BNAB.$$

Si de part et d'autre on retranche la somme des aires mixtilignes C*m*A, B*n*A, il restera

$$\text{aire } CAB = \text{aire } CMAm + \text{aire } BNAn.$$

Donc, etc.

Remarque.

Il est facile de construire des lunulles autres que celles

d'Hyppocrate, et dont on puisse assigner rigoureusement les aires; mais nous ne nous arrêterons pas à ces recherches.

Théorème XXXV. *Si deux cercles de rayons égaux se coupent en A et B, et que de l'un des points d'intersection A, on mène une ligne AC qui coupe l'arc intérieur en E, et l'arc extérieur en C, l'aire mixtiligne EmBnCE sera égale à celle du triangle EBC.* Fig. 177.

Il suffit de démontrer que la corde BC est égale à la corde BE, parce qu'il s'ensuit que le segment BnCB est égal au segment BmEB, et qu'en ajoutant à ces segmens égaux l'espace mixtiligne EmBC, on aura

$$\text{E}m\text{B}n\text{C} = \text{EBC}.$$

Or l'arc BmA = BpA; donc l'angle BEC qui a pour mesure la moitié de la somme des arcs BmE et EA ou de l'arc BmA, est égal à l'angle BCA qui a pour mesure la moitié de l'angle BpA : donc la corde BE est égale à la corde BC.

Si la droite AD est tangente en A à l'arc AEB, l'aire AEmBnCDA sera égale à celle du triangle ABD.

Théorème XXXVI. *Si deux cercles de même rayon se touchent en C, et que par le point de contact, on fasse passer un troisième cercle de même rayon, l'aire AFCEDNBMA = aire ABDC.* Fig. 178.

Menons la tangente CB au point de tangence M des cercles : on vient de voir que l'aire CFAMBC = aire CAB, et que l'aire CEDNBC = aire CDB. Donc, etc.

Division des Surfaces.

Problème LXIII. *Diviser le pentagone irrégulier ABCDE en trois parties équivalentes par des lignes tirées du point O donné sur le côté CD.* Fig. 179.

Faisant la surface du pentagone = A, celle du triangle

EOD $= B$, EN $= x$, EM $= x'$, on aura

$$\text{aire EON} + B = \tfrac{2}{3} A;$$

d'où $$\text{aire EON} = \tfrac{2}{3} A - B,$$

On tire de là, après avoir abaissé la perpendiculaire OH à BA,

$$x = \frac{\frac{2}{3} A - B}{\frac{1}{2} OH}.$$

Le point M sera donné par

$$x' = \frac{\frac{1}{3} A - B}{\frac{1}{2} OH}.$$

Problème LXIV. *Diviser la surface du pentagone ABCDE en trois portions équivalentes par des lignes tirées de l'angle D.*

Soient surf. ADE $= A$, ABCD $= C$, ABCDE $= D$, DH une Fig. 180. perpendiculaire abaissée du point D sur le côté AB; lorsque A sera moindre que le tiers de D, la ligne DM tombera à la gauche de AD, et on aura, pour déterminer AM $= x$, l'équation

$$A + \frac{DH}{2} \cdot x = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

de laquelle on tire

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{C - 2A}{\frac{1}{2} DH}\right).$$

Soit AN $= x'$; on aura l'équation

$$A + \frac{DH}{2} \cdot x' = \tfrac{2}{3}(A + C),$$

laquelle donne

$$x' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{2C - A}{\frac{1}{2} DH}\right).$$

On examinera encore les différens cas dans lesquels les lignes DM et DN doivent tomber à gauche et à droite des diagonales DA et DB.

Problème LXV. *Diviser la surface du pentagone ABCDE en trois portions équivalentes par des lignes tirées des points O et P donnés sur le côté CD.*

Des points donnés O et P soient abaissées des perpendiculaires OH et PH′ sur le côté AB ; faisant AEDO = A, surf. BCP = B, ABCO = C, ABPDE = D, on aura, pour déterminer AM = x et BN = x', les équations Fig. 181.

$$A + \frac{OH}{2} \cdot x = \tfrac{1}{3}(A + C),$$

$$B + \frac{PH'}{2} \cdot x' = \tfrac{1}{3}(B + D).$$

On tire de la première

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{C - 2A}{\tfrac{1}{2}OH}\right);$$

et de la seconde

$$x' = \tfrac{1}{3}\left(\frac{D - 2B}{\tfrac{1}{2}PH'}\right).$$

Problème LXVI. *Diviser la surface du pentagone ABCDE en deux portions qui soient entre elles dans le rapport de* m *à* n, *avec cette condition que la ligne de division parte du sommet d'un des angles.* Fig. 182.

Soient surf. AED = A, ABCD = C, ABCDE = E ; DH étant perpendiculaire sur le côté AB, on aura, pour déterminer AM = x, l'équation

$$A + \frac{DH}{2.}x : A + C :: m : m + n,$$

de laquelle on tire

$$x = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{A + C}{\tfrac{1}{2}DH} - \frac{A}{\tfrac{1}{2}DH}.$$

Problème LXVII. *Diviser un polygone quelconque en un certain nombre de parties équivalentes par des lignes parallèles à un des côtés du périmètre.*

Fig. 183. Soit le polygone ABCDEIF $=$ A à diviser en quatre parties égales par des lignes parallèles au côté AB; on tirera une ligne K′G′, ensorte que la surface résultante ABK′G′ paraisse $= \frac{1}{4}$ A; puis calculant ABK′G′ que nous représenterons par B′, on connaîtra le rapport de cette surface à la surface entière. Supposons que la construction ait donné

$$B' < \tfrac{1}{4} A,$$

il faudra ajouter à B′ une petite surface G′GKK′. Soit LH′ la hauteur du trapèze B′; le problème se réduit donc à trouver sur le prolongement de LH′ le point H par lequel doit passer la ligne GK; on a pour cela la proportion

$$B' : \tfrac{1}{4} A :: (AB + G'K')\, LH' : (AB + GK)\, LH.$$

Mais lorsque B′ diffère très-peu de $\frac{1}{4}$ A, la droite G′K′ est sensiblement égale à GK (*), les deux termes du dernier rapport prennent un facteur commun, et la proportion devient

$$B' : \tfrac{1}{4} A :: LH' : LH\,;$$

d'où l'on tire

$$LH = LH' \times \frac{A}{4B'}\,;$$

équation dans laquelle on connaît B′, A et la hauteur LH′ mesurée sur l'échelle du plan. Le calcul serait absolument le même dans le cas de $B' > \frac{1}{4}$ A.

Mais ce que nous venons de dire suppose que les sur-

(*) La différence entre G′K′ et GK, pour une même hauteur H′H, dépend des angles B et A; et cette différence devient d'autant plus grande que ces angles sont plus obtus.

faces partielles soient des trapèzes, ce qui n'a plus lieu dans la surface KGFMNF'C $= \frac{1}{4}$ A. Dans ce dernier cas, après avoir mené par le sommet F, la parallèle FF' à AB, on commencera par calculer la surface partielle FF'M'N' = D et celle ABCF'F dont la différence avec $\frac{1}{2}$ A donnera F'FMN = E; puis, pour corriger la surface GKCF'N'M'F supposée plus grande que $\frac{1}{4}$ A, on fera la proportion

$$D : E :: H''H^{\text{IV}} : H''H''' ;$$

d'où l'on tire

$$H''H''' = H''H^{\text{IV}} \cdot \frac{E}{D}.$$

Problème LXVIII. *Diviser en deux surfaces équivalentes le polygone ABCDEF par une droite RR' parallèle à la droite* xf *donnée de position.* Fig. 18.

L'aire P du polygone ayant été calculée par une méthode que nous ferons bientôt connaître (Rec. de Théor. et Probl. Levé des Plans), sa moitié sera l'espace RCDER'. Or si l'aire BCDEG était égale à l'aire BAFG, la droite BG serait la ligne de division cherchée; mais en supposant

$$BCDEG > \frac{P}{2},$$

on aura l'aire BRR'G, en retranchant de l'aire BCDEG qu'on calculera par la méthode annoncée, l'aire $\frac{P}{2}$. Ensuite on divisera l'aire BCEG qu'on évaluera par la même méthode, en deux parties BRR'G, RCER' qui soient entre elles dans un rapport connu, et la ligne RR' qui opère cette division, donnera la solution du problème.

On diviserait de même la figure en deux parties équivalentes par une droite SS' perpendiculaire à *xf*, en calculant l'aire ABCD*h*, D*h* étant perpendiculaire à *xf*, pour en déduire l'aire *h*DSS', et diviser ensuite le trapèze D*hk*E en deux surfaces qui soient dans un rapport donné.

Quant aux perpendiculaires D*h*, E*k*, elles peuvent être mesurées sur le terrain, ou calculées par la théorie des lignes proportionnelles.

Sur les Plans.

Problème LXIX. *Par une droite donnée dans l'espace, mener un plan parallèle à une droite donnée de position.*

Par un point quelconque de la première droite, on imaginera une parallèle à la seconde; la première droite et la parallèle à la seconde se coupant, détermineront un plan parallèle à la seconde droite.

Théorème XXXVII. *Si un plan et une ligne sont perpendiculaires à un plan, le plan et la ligne sont parallèles.*

Théorème XXXVIII. *Si un plan est perpendiculaire à une ligne, il est perpendiculaire à tout plan mené par cette ligne.*

Théorème XXXIX. *Si on mène parallèlement à une droite donnée de position deux plans qui se coupent, l'intersection de ces plans sera parallèle à la droite.*

Car si par la droite donnée et par un point de la commune intersection, on imagine un plan, il coupera chacun des deux plans donnés, suivant une parallèle à la droite. Ainsi, par un même point et dans le même plan mené par la droite donnée, on pourrait tracer deux parallèles à cette droite, ce qui est impossible.

Cette proposition trouvera son application dans la Géométrie descriptive.

Corollaire. Si on mène autant de plans qu'on voudra parallèles à une droite, et non parallèles entre eux, ces plans se couperont suivant des parallèles à cette droite.

Théorème XXXX. *Si par la diagonale d'un parallélogramme, on mène un plan dans une position quelconque, et que par les sommets des angles du parallélogramme, opposés à cette dia-*

gonale, on mène deux perpendiculaires au plan, ces perpendiculaires seront égales.

En effet, soit mené un plan par l'une de ces perpendiculaires; on pourra le faire tourner autour de cette perpendiculaire jusqu'à ce qu'il aille passer par le pié de l'autre, il contiendra donc alors les deux perpendiculaires; dans cette position, il coupera le plan du parallélogramme suivant l'autre diagonale divisée par la première en deux parties égales, et le plan de l'espace suivant une droite menée par les pieds des deux perpendiculaires et l'intersection des deux diagonales: il se formera donc deux triangles rectangles, ayant un côté égal qui sera l'hypoténuse, adjacens à deux angles égaux; donc les perpendiculaires qui sont deux côtés opposés à des angles égaux dans ces deux triangles, seront égales. Donc, etc.

Théorème XXXXI. *Soit GN l'intersection des deux plans NM, Nm; soit A un point situé hors de ces plans, soient AP, Ap les deux perpendiculaires abaissées de ce point sur les mêmes plans; je dis que l'angle pAP formé par ces deux perpendiculaires, est égal à celui que font entre eux les deux plans NM, Nm, et qu'ainsi il est la mesure de l'angle dièdre ou de l'angle des deux plans.* Fig. 185

En effet, suivant les deux perpendiculaires Ap, AP, conduisons un plan qui rencontre N*m* et NM suivant les droites D*p* et DP: on formera deux triangles A*p*I, IPD rectangles l'un en *p*, l'autre en P, qui donnent l'angle *p*AP = PD*p*. Il reste donc à démontrer que l'angle PD*p* mesure l'inclinaison des plans NM, N*m*. Par le point D élevons les perpendiculaires DR, DS, la première au plan NM, la seconde au plan N*m*: ces deux perpendiculaires seront dans le plan *p*AIPD: donc la droite GN sera perpendiculaire à ce plan, et par conséquent aux droites D*p*, DP menées par son pied dans ce plan. Donc l'angle *p*DP mesurera l'inclinaison des plans NM, N*m*.

Corollaire I. Il résulte de cette démonstration, que si l'on

mène un plan perpendiculaire à-la-fois à deux plans qui se coupent, les traces de ce plan sont perpendiculaires à l'intersection de ces deux derniers plans.

Corollaire II. Si par un point de l'intersection commune de deux plans, on élève dans chacun de ces plans une perpendiculaire à cette intersection, le plan de ces deux perpendiculaires sera perpendiculaire aux deux plans.

Corollaire III. L'angle RDS est égal à l'angle PD*p* : l'angle RDS est donc une autre mesure de l'angle dièdre ou de l'angle de deux plans, dont nous ferons usage par la suite.

Problème LXX. *Trouver la plus courte distance entre deux droites qui ne sont pas dans un même plan.*

Cette plus courte distance est une perpendiculaire aux deux droites.

Fig. 186. Soient AB, A'B' ces droites non parallèles, et situées dans des plans différens : on mènera par A'B' un plan B'A'C' parallèle à AB, et par AB un plan BAC parallèle à A'B' (Réc. de Théor. et Probl., Probl. LXIX). La plus courte distance cherchée sera visiblement celle des plans B'A'C', BAC. Par A'B', on fera passer un plan perpendiculaire au plan BAC, ce plan coupera BAC suivant AC, et cette intersection AC coupera la droite AB en A; la droite A'A perpendiculaire sur le plan BAC, sera la plus courte distance cherchée, puisqu'elle sera perpendiculaire en même temps aux plans BAC, B'A'C', et qu'elle aura ses deux extrémités sur les droites données AB et A'B'.

Introduction à la Géométrie descriptive.

Les notions suivantes font naturellement suite à la Géométrie des plans, en même tems qu'elles forment l'introduction à la Géométrie dite *descriptive*, parce qu'elle sert,

1° A représenter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, tous les corps de la nature qui en ont trois.

2°. A donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, la forme des corps, et de déduire et de ces formes et de la position respective de ces mêmes corps, toutes les vérités qui en résultent.

L'espace est cette étendue indéfinie dans laquelle tous les corps sont placés : puisque cet espace n'a pas de limites, on ne peut déterminer le lieu absolu des corps, mais seulement leurs situations relatives, ou la position de chacun d'eux par rapport à des objets fixes qui seront des points, des lignes ou des plans; et c'est en effet la seule connaissance qui nous importe. Ces objets fixes seront pris arbitrairement; mais une fois choisis, ils ne devront plus varier; autrement on n'aurait pas la situation relative des points en question.

Pour prendre le cas le plus simple, supposons que les points en question soient dans un plan : dans ce plan, concevons deux droites AX, AY faisant entre elles un angle quelconque Fig. 187. donné : tout point tel que M situé dans ce plan, est déterminé ou défini de position, lorsqu'on connaît les longueurs des droites MQ, MP menées de ce point parallèlement aux axes AX, AY et terminées à ces axes. Un autre point M′ sera pareillement caractérisé de position par les données analogues M′Q′, M′P′; et la situation du point M′ par rapport au point M sera connue. Si l'angle YAX est droit, supposition qu'on fait ordinairement, APMQ est un rectangle, MQ, MP deviennent des distances aux lignes fixes AY, AX, et on peut remplacer MQ par AP, ensorte que les élémens de position des points M et M′ sont AP, PM pour M, AP′, P′M′ pour M′, etc. Par ces données, les points M et M′ ne peuvent être confondus avec d'autres points du plan.

Pour définir la position d'un point dans l'espace, il faut rapporter cette position à quelques autres objets distincts des parties de l'espace qui les renferment, et qui seront eux-mêmes connus de position.

Supposons que ce point soit rapporté à un certain nombre de points A, B, C etc. dont la position soit connue.

Soit ce point à un mètre de distance du point A; il sera sur la surface d'une sphère décrite du point A comme centre et avec un mètre de rayon.

Supposons ensuite que, d'après les définitions de la position du point, il doive etre à deux mètres de distance du deuxième point connu B : il sera sur la surface d'une autre sphère décrite du point B et avec deux mètres de rayon.

Donc le point donné sera sur la commune intersection de deux sphères, c'est-à-dire sur la circonférence d'un cercle dont le centre est sur la droite qui joint ceux des deux sphères, et dont le plan est perpendiculaire à cette droite.

Supposons enfin que le point doive se trouver à trois mètres de distance d'un troisième point C connu : il sera donc sur l'intersection de la circonférence dont nous venons de parler avec la surface d'une sphère décrite du centre C et avec un rayon de trois mètres.

Or une sphère coupe une circonférence en deux points seulement; donc si par la ligne qui joint les centres A et B et le troisième centre C, on mène un plan, et qu'on dise de quel côté se trouve le point de l'espace par rapport à ce plan, ce point sera absolument déterminé, et ne pourra rester confondu avec aucun autre point de l'espace.

On voit qu'en employant ainsi, pour déterminer la position d'un point dans l'espace, ses distances à d'autres points connus et dont le nombre est nécessairement trois, l'on est amené à des constructions qui ne sont pas assez simples pour servir de base à des procédés habituels.

Au lieu de rapporter la position d'un point à d'autres points, essayons de la rapporter à des droites données.

Supposons que le point doive se trouver à un mètre d'une droite connue A.

Il se trouvera sur la surface d'un cylindre d'un mètre de rayon, et dont l'axe sera la droite A : mais par cette seule donnée, il reste confondu avec tous les points de cette surface cylindrique.

Supposons donc qu'il soit à deux mètres de distance d'une autre droite B.

Il sera sur la surface d'un second cylindre de deux mètres de rayon, et dont l'axe sera la droite B.

Il sera donc sur l'intersection de deux surfaces cylindriques; laquelle est une courbe à double courbure (*), puisqu'elle participe de la courbure du premier cylindre et de celle du second.

Supposons enfin que le point demandé doive être à trois mètres de distance d'une troisième droite C.

Il se trouvera sur les intersections d'une troisième surface cylindrique avec la courbe à double courbure, intersections qui sont au nombre de huit.

On voit donc que les considérations auxquelles on est conduit pour déterminer la position d'un point dans l'espace, par la connaissance de ses distances à trois droites connues, sont encore bien moins simples que celles auxquelles donnent lieu ses distances à trois points.

Cherchons s'il ne serait pas plus simple de déterminer la position d'un point par la connaissance de ses distances à des plans connus.

Supposons qu'il soit à un mètre de distance du premier plan A, sans qu'il soit exprimé de quel côté il est placé par rapport à ce plan.

Il sera sur deux plans parallèles au plan A que nous supposerons horizontal, et menés à un mètre de distance de ce dernier, l'un au-dessus, l'autre au-dessous.

(*) Une courbe à double courbure est une courbe dont deux élémens quelconques consécutifs ne sont pas dans un même plan.

Supposons, en second lieu, que le point cherché soit à deux mètres de distance d'un second plan B perpendiculaire à A.

Il sera donc sur deux plans parallèles au plan B, tous deux à deux mètres de distance de ce plan, l'un à droite, l'autre à gauche.

Donc enfin ce point ne peut plus se trouver que sur les intersections de l'un des deux plans parallèles à B avec les deux plans parallèles à A, intersections qui sont au nombre de deux droites, et sur celles de l'autre plan parallèle à B avec les deux plans parallèles à A, c'est-à-dire sur deux autres droites.

Supposons enfin que le point soit à trois mètres de distance d'un troisième plan C perpendiculaire à A et à B.

Il sera sur les intersections des quatre lignes droites dont nous venons de parler, avec les deux plans parallèles à C et placés à trois mètres de distance de ce dernier de part et d'autre, l'un en-deçà, l'autre au-delà.

Or l'intersection de chacun de ces plans avec les quatre droites, donne quatre points; donc l'intersection des deux plans en donne huit.

Il faut donc quelques conditions particulières de plus pour isoler ce point des autres points de l'espace.

Mais si on indique de plus de quel côté par rapport au premier plan A, puis de quel côté par rapport au second plan B, les distances doivent être prises; au lieu de quatre plans, on n'en aura plus que deux, et le point cherché sera sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur une seule droite; si de plus on ajoute de quel côté le plan doit être pris par rapport au troisième plan C, le point cherché sera l'intersection d'une droite unique et d'un plan unique; il sera donc parfaitement distinct de tous les autres points de l'espace.

On voit donc que, quoique par rapport au nombre de ses dimensions, le plan soit moins simple que la ligne droite qui n'en a qu'une et que le point qui n'en a pas, il présente cependant plus de facilité que le point et la ligne droite pour la détermination d'un point dans l'espace. C'est ce procédé qu'on emploie ordinairement dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, où on est convenu de déterminer la position d'un point, par ses distances à trois plans connus de position et rectangulaire entre eux.

Mais dans la Géométrie descriptive qui a été pratiquée depuis beaucoup plus long-temps par un grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés ; et au lieu de la considération de trois plans, on est parvenu, au moyen des *projections*, à n'avoir plus besoin, explicitement, que de celle de deux.

L'Architecte rapporte toutes les parties d'un édifice par des perpendiculaires abaissées sur un plan horizontal, et ce dessin s'appelle le *plan géométral* de l'édifice ; il fait connaître la situation respective des points remarquables de l'édifice sur le plan horizontal, par des fils à plomb.

Pour compléter la description, l'architecte conçoit un plan vertical par une ligne donnée dans le plan géométral, sur lequel il rapporte les objets à leur hauteur au-dessus du plan horizontal ; cette figure s'appelle *coupe* ou *profil*, si le plan passe dans l'intérieur de l'édifice, et *élévation*, si elle n'en fait voir que les parties extérieures.

Quant aux dimensions inclinées sur le profil et sur le plan géométral, elles ne sauraient y être représentées dans leur longueur naturelle, et c'est à les déterminer que s'applique la géométrie dont nous allons présenter les élémens.

Soient trois droites fixes AX, AY, AZ réciproquement per- Fig.188.
pendiculaires l'une à l'autre au point A ; chacune d'elles sera perpendiculaire au plan des deux autres, puisqu'elle l'est à

deux droites qui se coupent à son pié dans ce plan : ainsi chacun de ces plans sera en même temps perpendiculaire aux deux autres, puisqu'il est assujéti à passer par deux droites dont chacune est perpendiculaire à l'un de ces plans. Ces trois plans forment donc les trois faces d'un parallélepipède rectangle, et l'angle solide trièdre A. Nous supposerons les plans ZAX et ZAY verticaux et le plan XAY horizontal.

Qu'on se représente un point M dans l'espace, ou situé hors des plans ZAX, ZAY, YAX, par exemple, en avant du premier plan, à droite du second et au-dessus du troisième, et qu'on imagine de M des perpendiculaires MM', MM'', MM''' sur ces trois plans : ces perpendiculaires mesureront les plus courtes distances du point M de l'espace à chacun de ces plans. Les plans menés par les perpendiculaires MM' et MM''; MM' et MM'''; MM'' et MM''' acheveront le parallèlepipède, et le point M de l'espace sera le sommet de l'angle solide trièdre opposé à l'angle A.

La distance MM' du point M au plan ZAX est en longueur vraie M''*m* ou A*m*'' : celle MM''' du même point au plan ZAY est égal à M''*m*'' ou A*m* : enfin celle du même point M au plan horizontal YAX, est MM'' ou M'*m*, ou A*m*'. Ainsi ces distances se retrouvent sur les droites fixes ou axes AY, AX, AZ, et elles sont comptées du point A.

Les points M', M''', piés des perpendiculaires abaissées du point de l'espace sur les plans verticaux, sont dits, *projections verticales* du point, et le point M'', pié de la perpendiculaire abaissée du même point sur le plan horizontal, est dit *projection horizontale* du point.

Deux de ces projections suffisent pour retrouver le point : car les perpendiculaires menées par chacune d'elles, au plan qui la contient, vont se rencontrer dans le point de l'espace.

La troisième projection résulte évidemment des deux autres, c'est ce que la figure indique clairement.

Fig. 189. Considérons maintenant une ligne droite AB située d'une

manière quelconque dans l'espace, et un plan KL qui soit le plan même de la planche : si de tous les points de cette droite on conçoit des perpendiculaires abaissées sur le plan LK, tous les piés de ces perpendiculaires seront dans une ligne droite indéfinie *ab* qu'on nomme *projection de la droite sur le plan.*

MN étant une portion de AB, M'N' en sera la projection : lorsque le plan KL est horizontal, M'N' est dite *projection horizontale.*

Mais on observera qu'il suffit des projections M' et N' des extrémités M et N de la droite, puisqu'en les joignant, on a celle de la totalité de cette droite.

Le plan MM'N'M s'appelle *plan projetant ;* et KL se nomme *plan de projection.* On nomme donc plan projetant d'une droite celui qui passant par cette droite, est perpendiculaire au plan de projection : l'intersection de ces deux plans est la projection même de la droite.

M'N' est la projection horizontale commune sur le plan KL de toute droite située d'une manière quelconque dans le plan projetant, entre les perpendiculaires extrêmes MM' et NN' ; ensorte qu'on ne peut conclure ni la longueur ni la position d'une droite de l'espace de la seule donnée de sa projection.

Supposons toujours le plan horizontal KL et un plan PQ qui lui soit perpendiculaire, de telle sorte que leur intersection PP' soit perpendiculaire aux parallèles LL', KK' : soit la droite MN dans l'espace, au-dessus du plan KL et à droite du plan PQ ; MM" et NN" étant des perpendiculaires au plan KL, M"N" sera la *projection horizontale* de MN ; de même les lignes MM' et NN' étant perpendiculaires au plan PQ, M'N' sera la projection de MN sur PQ, ou la *projection verticale* de MN. Fig. 190.

Maintenant si par M"N" on élève un plan perpendiculaire à KL, et par M'N' un plan perpendiculaire à PQ, l'intersection de ces deux plans projetans, sera la droite MN de l'es-

pace. Les données de deux projections d'une droite sur deux plans, sont donc des définitions suffisantes de cette droite.

Dans la pratique, la projection M'N' ne se trace pas sur un plan qui soit réellement vertical ; on conçoit que ce plan ait tourné autour de PP' pour s'appliquer sur LK : alors les points N' et M' se rabattent, avec le plan PQ, sur le plan LK, en décrivant des arcs des points *n* et *m* comme centres, et dont les rayons sont les perpendiculaires N'*n* et M'*m* abaissées des points N' et M' sur la charnière : ces points viennent se placer en N‴ et M‴ sur les prolongemens des lignes N″*n*, M″*m*, qui sont aussi perpendiculaires à PP', puisque, dans la rotation de PQ autour de sa charnière, les lignes N'*n* et M'*m* n'ont pas cessé d'être perpendiculaires à PP' en *n* et *m*.

On peut supposer un troisième plan passant par P'K' et P'Q, et qui sera conséquemment perpendiculaire à chacun des deux premiers, et sur lequel on ait aussi projeté la ligne MN par deux perpendiculaires menées des points M et N à ce plan.

Ainsi, pour tout présenter dans une figure, on supposera, ainsi que nous l'avons fait pour un point, trois axes AX,
Fig. 191. AY, AZ réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre ; les deux premiers étant supposés dans le plan même de la planche qui sera le plan horizontal, le troisième AZ étant vertical : ces trois plans seront aussi réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre. YAX remplacera le plan KL, et ZAX le plan PQ. Le troisième plan sera conduit par AY et l'axe vertical AZ. Les trois projections de la droite de l'espace, seront M'N' dans le plan vertical XAZ, M″N″ dans le plan horizontal XAY, et enfin N‴M‴ dans le second plan vertical ZAY.

Lorsque, pour le tracé, le plan vertical XAZ est rabattu dans le prolongement du plan horizontal XAY, qui est figuré par le plan de la planche, les projections horizontale et verticale N″, N', correspondantes au même point de l'espace, sont dans une perpendiculaire N″N' à l'axe AX, ainsi que

nous l'avons déjà fait observer plus haut. Si l'on se sert des deux plans verticaux XAZ et ZAY, on imagine que celui-ci tourne autour de AZ comme charnière, jusqu'à venir se placer dans le prolongement du premier, en AZY', emportant avec lui sa projection M‴N‴, et alors les deux projections d'un même point de l'espace, telles que N', N‴, sont sur une perpendiculaire N'N‴ à l'axe AZ.

Pour bien se représenter la position de la droite de l'espace, donnée par ce système de projections, on imaginera les plans XAZ et ZAY' qui n'en font qu'un, relevés à angle droit sur le plan horizontal, suivant XAY', puis la portion ZAY' tournant autour de AZ jusqu'à ce que AY' coïncide avec AY : alors, si par M'N' et par M″N″ on élève des plans respectivement perpendiculaires à XAZ, XAY, on a, par leur intersection, la droite en question : elle est encore donnée par la rencontre des plans projetans élevés par M'N' et par M‴N‴, ou par M″N″ et par M‴N‴ aux plans qui renferment ces projections.

Ainsi, deux quelconques de ces projections isolent complètement la droite de l'espace, c'est-à-dire, qu'elles en définissent la position.

L'une quelconque des trois projections est toujours la conséquence nécessaire des deux autres : en effet le point de la droite de l'espace, projeté en N' et N‴, est à une hauteur N'n″ au-dessus de sa projection horizontale N″ : la projection du même point dans le plan vertical ZAY qui est la position vraie du plan ZAY', est donc à une hauteur N'n″ au-dessus de n‴, en supposant N″n‴ perpendiculaire à AY : si donc on ramène le point n‴ sur AY' par un arc de cercle décrit de A, comme centre, avec le rayon An‴, et qu'on élève en n‴ une perpendiculaire à AY', égale à N'n″, le point N‴, extrémité de cette perpendiculaire, sera la troisième projection verticale : on conclura pareillement M‴ des projections M' et M″; conséquemment on aura la seconde projection verticale de la droite.

On peut, au moyen de deux projections, obtenir en lon- Fig. 192

gueur vraie, la droite de l'espace sur l'un des plans de projection, et nous choisirons à cet effet le plan horizontal.

On observera que les points de la droite, projetés horizontalement en M'', N'', et verticalement en M', N', sont à des hauteurs $M'm''$, $N'n''$ au-dessus de M'' et N''; ensorte que la droite de l'espace, les hauteurs verticales de ses points extrêmes et sa projection horizontale $M''N''$, forment un trapèze dont le plan passant par $M''N''$ est vertical; si on imagine ce trapèze tournant autour de sa base $M''N''$, comme charnière, les perpendiculaires extrêmes qui en sont les côtés parallèles, le seront constamment à la projection $M''N''$ en N'' et M'', et elles n'auront pas varié de longueur; ainsi le trapèze rabattu dans le plan YAX, sera $N''MMN''$, dans lequel les perpendiculaires $M''M$, $N''N$ sont égales à $M'm''$, $N'n''$. Ce trapèze supposé relevé verticalement sur XAY, après avoir tourné autour de $M''N''$, donnera la longueur et montrera la position vraie de la droite de l'espace.

Mais si par le point M on mène une parallèle Mn à $M''N''$, le triangle MNn, rectangle en n, donnera

$$\overline{MN}^2 = \overline{Nn}^2 + \overline{Mn}^2 = (NN'' - nN'')^2 + \overline{M''N''}^2$$

ou

$$\overline{MN}^2 = (N'n'' - M'm'')^2 + \overline{M''N''}^2$$

et conséquemment

$$MN = \sqrt{(N'n'' - M'm'')^2 + \overline{M''N''}^2},$$

Si l'on mène par M'' la parallèle $M''p$ à AX, le triangle $M''N''p$ rectangle en p donnera

$$\overline{M''N''}^2 = \overline{N''p}^2 + \overline{M''p}^2 = (N''n'' - M''m'')^2 + (N''n''' - M''m''')^2.$$

Substituant dans MN cette valeur de $\overline{M''N''}^2$, on aura

$$MN = \sqrt{\{(N'n'' - M'm'')^2 + (N''n''' - M''m''')^2 + (N''n'' - M''m'')^2\}},$$

expression toute en quantités données par les projections. On en déduit encore

$$MN=\sqrt{\{(An'-Am')^2+(An''-Am'')^2+(An'''-Am''')^2\}}\ldots(1),$$

autre expression de la longueur MN d'une droite de l'espace, au moyen des distances de chacune de ses extrémités aux trois plans rectangulaires de projection.

Si l'une des extrémités de la droite de l'espace, celle qui est projetée en M' et M'' tombe en A, alors

$$Am' = 0, \quad Am'' = 0, \quad Am''' = 0,$$

et on trouve

$$MN \text{ ou } AN = \sqrt{\{\overline{An'}^2 + \overline{An''}^2 + \overline{An'''}^2\}}\ldots(2).$$

Problème XXXXII. *Le quarré de l'aire d'un triangle est égal à la somme des quarrés des aires des trois projections de sa surface sur les trois plans coordonnés.*

Soit YAX un triangle rectangle en A, et dont le plan est horizontal; YAZ, XAZ les plans verticaux qu'il faudra voir relevés perpendiculairement sur YAX, suivant AY et AX, de sorte que les deux lignes AZ, AZ se réunissent en une seule arête perpendiculaire au plan YAX en A; enfin, soit le plan YZ'X qui ferme la pyramide triangulaire ZAYX, ensorte que, dans la position vraie du plan YZ'X, le point Z' coïncide avec Z, XZ' avec XZ, et YZ' avec YZ. Désignons les aires YAX par P, YAZ par R, XAZ par Q, YZ'X par S, et faisons $AX=a$, $AZ=b$, $AY=c$. Cela posé, le triangle XAY rectangle en A, donne Fig.

$$\overline{YX}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AY}^2; \text{ d'où } YX = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Si du point A on abaisse une perpendiculaire AB sur YX, on aura

$$YX : AY :: AX : AB; \text{ d'où } AB = \frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}};$$

le triangle rectangle AZB, dont le plan est vertical et a pour trace horizontale AB, donne

$$\overline{BZ}^2 = \overline{AZ}^2 + \overline{AB}^2 = b^2 + \frac{a^2c^2}{a^2+c^2},$$

et conséquemment

$$BZ = \sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+c^2}};$$

on prend ici la valeur de la ligne ZB dans le triangle ZAB, parce qu'elle est la même que celle du côté Z'B considéré dans la face YZ'X en position. Or

$$S = \frac{YX \times BZ'}{2} = \frac{YX \times BZ}{2} = \sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4}};$$

d'où

$$S^2 = \frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4};$$

mais d'ailleurs on a

$$Q^2 = \frac{a^2b^2}{4}, \quad R^2 = \frac{b^2c^2}{4};$$

$$P^2 = \frac{\overline{YX}^2 \times \overline{AB}^2}{4} = \frac{(a^2+c^2) \times \frac{a^2c^2}{a^2+c^2}}{4} = \frac{a^2c^2}{4};$$

donc

$$S^2 = Q^2 + R^2 + P^2,$$

S, Q, R et P étant les nombres d'unités qui représentent les aires de chacun des triangles.

Nous retrouverons dans la *Polyédrométrie* cette propriété qui n'est qu'une généralisation de celle du quarré de l'hypoténuse.

Théoréme XXXXIII. *L'aire de la projection d'un triangle, est égale à celle du triangle, multipliée par le cosinus de l'angle fait par le triangle et sa projection.*

Soit ABC le triangle dans l'espace; ayant abaissé la perpendiculaire AP sur le plan NN, P sera la projection du sommet A, et BPC sera celle du triangle BAC; mais AM étant perpendiculaire sur BC, PM l'est en M sur BC, et les deux triangles ABC, PBC qui ont même base BC, ont leurs surfaces comme les hauteurs AM, PM: donc Fig.1

$$\frac{\text{surf ABC}}{\text{surf PBC}}=\frac{\text{AM}}{\text{PM}}=\frac{r}{\sin \text{PAM}}=\frac{r}{\cos \text{AMP}}.$$

Faisant $r=1$, on a

$$\text{surf PBC}=\text{surf ABC}\times\cos \text{AMP}.$$

Nous allons généraliser ce théorème.

Théorème XXXXIV. *Si on projette une surface plane quelconque sur un autre plan par des perpendiculaires abaissées des sommets sur le plan de projection, la projection de cette surface sera égale à son aire multipliée par le cosinus de l'angle entre les deux plans.*

Le polygone ABCDE est dans l'espace, et le côté AB est dans le plan horizontal; des sommets C, D, E, on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal mené par AB; ces perpendiculaires percent ce plan en des points C′, D′, E′ qui déterminent le polygone ABC′D′E′, projection horizontale du premier. Fig.1

Le triangle ABC′ $=b$ est la projection horizontale du triangle de l'espace ABC $=a$; on a donc, d'après le théorème précédent

$$b=a\cos(a,b)\ldots\ldots(1),$$

$a\ b$ désignant l'angle entre les surfaces a et b, angle qui est celui de deux perpendiculaires en un même point de la commune intersection AB, situées dans les deux plans.

Les côtés DC et AB prolongés, se rencontrent en F, et le côté D′C′ prolongé ira aussi passer par ce point: donc AD′F sera la projection horizontale du triangle ADF, et AC′F

sera celle de ACF ; on aura donc

$$AD'F = ADF \cos(a, b), \quad AC'F = ACF \cos(a, b);$$

donc

$$AD'F - AC'F = (ADF - ACF) \cos(a, b),$$

c'est-à-dire

$$AD'C' = ADC \cos(a, b);$$

et en désignant AD'C' par b', et ADC par a', on a enfin

$$b' = a' \cos(a, b) \ldots\ldots (2).$$

Il peut arriver que les points D, C soient à même hauteur au-dessus du plan horizontal, auquel cas le côté DC prolongé ne pourrait rencontrer le plan horizontal ; alors si du sommet commun A on mène des perpendiculaires $AH' = h'$, $AH = h$ sur les côtés parallèles C'D' et CD, les surfaces des triangles b' et a' seront

$$b' = \frac{C'D'.h'}{2}, \quad a' = \frac{CD.h}{2};$$

d'où, à cause de $C'D' = CD$, et en observant que l'angle AH'H est droit,

$$\frac{b'}{a'} = \frac{h'}{h} = \cos(h', h),$$

(h', h) étant toujours l'angle entre les perpendiculaires h' et h. Or la ligne CD étant horizontale, est parallèle à AB; il en est de même de C'D' : donc les perpendiculaires h' et h abaissées de A sur C'D' et CD sont aussi perpendiculaires à AB, l'une dans le plan horizontal, et l'autre dans celui de l'espace : ces perpendiculaires mesurent donc encore l'angle entre les plans du polygone de l'espace et du polygone de projection, et conséquemment le cas où un côté du polygone de l'espace est horizontal, ne fait pas exception.

Si on désigne par b'' et a'' les surfaces AD'E', ADE, on aura pareillement

$$b'' = a'' \cos(a, b) \ldots\ldots (3).$$

L'addition des égalités (1), (2) et (3) donne cette conséquence,

$$b + b' + b'' = (a + a' + a'') \cos(a, b).$$

Remarque.

1°. La proposition serait encore vraie, comme il est facile de le déduire de la démonstration précédente, dans le cas même où aucun des côtés du polygone donné, ne se trouverait dans le plan horizontal ou dans le plan de projection.

2°. De ce théorème combiné avec le théorème XXXXII, on déduit cette propriété générale : *Le quarré de l'aire d'une surface polygonale quelconque, est égal à la somme des quarrés des aires de ses projections sur trois plans rectangulaires.* Cette propriété est le sujet du théorème suivant.

Théorème XXXXV. *Si l'on projette une figure plane quelconque sur trois plans rectangulaires, la somme des quarrés des aires de ces projections, est égale au quarré de l'aire de la figure proposée.*

Lemm. *La somme des quarrés des cosinus des angles que fait un plan quelconque dans l'espace, avec les trois plans coordonnés, est égale au quarré du rayon.*

Soient AX, AY, AZ trois axes rectangulaires qui déterminent les trois plans coordonnés; soit AM une droite dans l'espace passant par l'origine A. Si par le point M on conçoit un plan perpendiculaire à la droite AM, ce plan coupera les trois plans coordonnés suivant les lignes YX, XZ, YZ : les directions AN', AN'', AN''' des projections de la droite AM sur ces plans coordonnés, seront perpendiculaires aux traces Fig. 1!

YX, XZ, YZ, parce que les trois plans projetans de la droite AM sur les plans coordonnés, sont en même temps perpendiculaires à ces plans et au plan XYZ : de plus, ces plans projetans couperont celui de l'espace, suivant des droites MN', MN'', MN''' faisant avec AN', AN'', AN''' des angles qui mesurent l'inclinaison du premier plan sur chacun des trois autres. Si du point M on abaisse des perpendiculaires MM', MM'', MM''' sur les plans coordonnés, ces perpendiculaires représenteront les sinus des angles MAM', MAM'', MAM''', la droite AM étant prise pour le rayon : elles seront donc les cosinus des angles AN'M, AN''M, AN'''M, ou des inclinaisons du plan de l'espace sur les plans coordonnés. Or, d'après la formule (2), pag. 185, on a cette valeur de $\overline{AM}^2$,

$$\overline{AM}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{MM''}^2 + \overline{MM'''}^2.$$

Donc, etc.

Maintenant si l'on désigne par S l'aire de la figure plane dans l'espace, par S', S'', S''' les aires de ses trois projections, et par A', A'', A''' les angles qu'elle fait avec les trois plans coordonnés; on a (Théor. XXXXVIII et XXXXIV)

$$S : S' : S'' : S''' :: \text{ray} : \cos A' : \cos A'' : \cos A''',$$

et en élevant au quarré,

$$S^2 : S'^2 : S''^2 : S'''^2 :: R^2 : \cos^2 A' : \cos^2 A'' : \cos^2 A''',$$

d'où

$$S^2 : S'^2 + S''^2 + S'''^2 :: R^2 : \cos^2 A' + \cos^2 A'' + \cos^2 A''',$$

et parce que, d'après le lemme,

$$R^2 = \cos^2 A' + \cos^2 A'' + \cos^2 A''',$$

on a enfin

$$S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2.$$

Donc, etc.

Problème LXXI. *Déterminer les points dans lesquels une droite de l'espace, prolongée indéfiniment, perce les plans horizontal et vertical de projection.*

Soient toujours M'N', M"N" les projections verticale et horizontale d'une portion définie d'une droite de l'espace : cette droite, prolongée suffisamment, ira percer le plan horizontal, ce qui résulte visiblement du cours de sa projection verticale N'M' qui, dans le plan vertical mis en position, est toujours perpendiculairement vis-à-vis de la droite. Mais le plan Fig. 196. suivant lequel cette droite se projette sur XAZ, c'est-à-dire le plan projetant, ayant pour intersection avec XAZ, la projection verticale N'M' ou N'R, rencontre le plan horizontal suivant la perpendiculaire RR' à l'axe AX : donc la droite de l'espace étant toute entière dans ce plan, ne peut percer le plan horizontal que dans l'un des points de RR' ; d'ailleurs, la même droite, en tant qu'elle est aussi contenue dans le plan vertical mené par N"M", ne peut rencontrer le plan horizontal que dans l'un des points de sa projection N"M" prolongée ; donc nécessairement cette rencontre est en R' sur la projection horizontale, et perpendiculairement vis-à-vis de l'intersection R de sa projection verticale suffisamment prolongée, avec l'axe AX.

Reste à trouver le point où elle va rencontrer la portion inférieure du plan vertical XAZ mis en position. Supposons la projection horizontale N"M" continuée jusqu'à l'axe AX en R"; R'R" sera la projection horizontale de la portion de la droite de l'espace comprise entre les points dans lesquels elle perce le plan horizontal et le plan vertical dans sa partie inférieure au plan horizontal. D'ailleurs comme le plan vertical dont la trace horizontale est N"R", a pour trace dans le prolongement du plan vertical de projection, la perpendiculaire R"R‴ à AX, le point de rencontre cherché ne peut être que sur R"R‴ ; mais aussi ce même point ne peut se trouver que sur N'R‴ ; donc il sera à l'intersection R‴ des deux droites qui doivent le contenir.

Pour concevoir très-nettement ce que nous venons de dire, il faudra se représenter la droite de l'espace perpendiculairement vis-à-vis de sa projection verticale, ou dans le plan projetant mené par cette projection, et dont la trace sur XAZ est N'R", et cette même droite verticalement au-dessus de sa projection verticale N"R' qu'elle perce en R', pour passer verticalement au-dessous du prolongement R'R".

Mais la droite peut rencontrer d'abord la partie supérieure du plan vertical, puis celle du plan horizontal, qui est au-delà, ou derrière : la construction qui donne ces deux points ne différera pas de la précédente, si l'on suppose que le plan vertical devienne horizontal, et réciproquement. Le cours de ces deux projections indiquera toujours celle de ces deux circonstances qui a lieu.

Les caractères auxquels on reconnaît qu'une droite de l'espace est horizontale, verticale ou parallèle à l'un des deux autres plans coordonnés, se déduiront aisément de la notion de projection. On verra sans peine que, dans le premier cas, les projections verticales de la droite sont parallèles aux axes AX et AY; et que sa projection horizontale est égale à la droite de l'espace; que, dans le second, la projection horizontale est un point, tandis que les deux projections verticales sont perpendiculaires aux axes AX et AY, et égales à la droite de l'espace. On conclura encore de la définition de projection, que deux droites parallèles dans l'espace ont leurs projections sur le même plan, parallèles l'une à l'autre : en effet les intersections des deux plans projetans parallèles par le plan de projection, sont des lignes parallèles. Mais ce qu'il est essentiel d'observer, c'est que si deux points donnés dans deux plans coordonnés dont l'un soit rabattu dans le prolongement de l'autre, ne sont pas sur une perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans, ils ne peuvent être les projections sur ces plans d'un même point de l'espace. Si les deux projections d'une ligne de l'espace sont des droites, la ligne de l'espace est elle-même une droite ; et si une seule de ces

projections est une courbe, la ligne de l'espace est une ligne courbe.

Problème LXXII. *Étant données les projections d'un point de l'espace sur deux des trois plans rectangulaires, en déduire les projections du même point sur deux nouveaux plans rectangulaires donnés de position par rapport aux premiers.*

M′, M″ sont les projections horizontale et verticale d'un point de l'espace sur les plans primitifs XAY, ZAX, et on demande les projections du même point sur les deux plans NMX′, Y′A′Z′ perpendiculaires entre eux, et donnés de position par rapport aux premiers, ensorte qu'on connaît l'inclinaison du plan NMX′ sur XAY : les nouveaux axes rectangulaires sont A′X′, A′Y′, A′Z′, dont les deux derniers déterminent un plan perpendiculaire au plan NMX′, et en même temps vertical : l'axe AY′ est dans le plan NMX′. Fig. 197.

Si du point projeté en M′ et M″ on conçoit deux perpendiculaires, l'une sur le plan X′A′Y′, et l'autre sur le plan Y′A′Z′, les pieds de ces perpendiculaires seront les projections demandées.

La perpendiculaire menée du point de l'espace sur le plan X′A′Y′, c'est-à-dire, la plus courte distance du point donné à ce plan, est parallèle au second plan de projection Y′A′Z′; donc sa projection horizontale sur le plan XAY sera suivant une perpendiculaire *p*P menée par M′ à la trace MX′, et sa projection sur le plan Y′A′Z′ sera cette plus courte distance en longueur vraie : pour trouver cette dernière projection, on imaginera du point donné une parallèle au plan NMX ou Y′A′X′, laquelle se projettera sur XAY suivant la parallèle M′NK à la trace MX′; cette parallèle rencontrera en N la trace horizontale A′T du second plan projetant vertical Y′A′X, trace qui est perpendiculaire à MX′; si on fait tourner ce plan autour de sa trace horizontale A′T jusqu'à ce qu'il se rabatte dans le plan XAY, l'intersection A′Y′ se placera suivant A′Y″ faisant avec A′T un angle TA′Y″ égal à

l'inclinaison donnée du plan NMX′ sur le plan horizontal ; le pié de la perpendiculaire projetée sur le plan Y′A′Z′, se rabattra donc sur A′Y″, et si l'on prend NK $=m$M″, le point K sera aussi le rabattement de la projection sur Y′A′Z′ du point donné ; donc KR perpendiculaire sur A′Y″, sera celui de la projection sur Y′A′Z′ de la plus courte distance en question ; et de plus, KR sera cette perpendiculaire en longueur vraie. La droite A′R est donc la distance à la trace MX′ de la projection du point de l'espace sur le plan NMX′.

Si maintenant on conçoit que le plan NMX′ tourne autour de la trace MX′ pour se rabattre sur le plan horizontal, la ligne A′R qui, dans sa position vraie, est située sur A′Y′ perpendiculaire à MX′ en A′, viendra se coucher sur A′T, et la projection du point donné sur le plan Y′A′X′, se trouvera à une distance A′R′ de MX′, égale à A′R ; mais comme cette projection est dans le plan vertical élevé sur pP, puisque la perpendiculaire est dans ce plan, elle tombera sur cette droite dans le mouvement supposé, à une distance de p égale à A′R′, ou à A′R, et conséquemment elle sera en P. Ainsi les coordonnées de la projection du point sur le plan NMX′, rapporté à l'origine A′, seront A′p et pP $=$ A′R′ $=$ A′R, qu'il faut compter sur une parallèle à l'axe A′Y′, menée par p dans le plan NMX.

Les coordonnées de la projection du point sur le plan vertical Y′A′Z′ sont A′R′ qu'il faut compter sur A′Y′, et une perpendiculaire R′R″ au plan NMX′ en R′, ou une parallèle à A′Z′, laquelle est égale à RK.

On remarquera que les coordonnées des deux projections du point sur les deux nouveaux plans, sont x' et y' sur le plan Y′A′X′, et y', z' sur le plan Y′A′Z′, ensorte que la position du point qui résulte de ces deux projections, dépend en effet des trois nouvelles coordonnées x', y', z' rapportées à la nouvelle origine A′, prise dans le plan horizontal primitif. Maintenant il est facile de passer des deux projections d'une droite

de l'espace sur deux plans rectangulaires, aux projections de la même droite sur deux autres plans analogues aux plans Y'A'X' et Y'A'Z'.

Problème. LXXIII. *Trouver la position et la grandeur du cercle intersection d'une sphère donnée par un plan donné de position.*

Lemme. Pour projeter une sphère sur un plan, il faut, conformément à la définition, concevoir de tous les points de la sphère, des perpendiculaires sur le plan, et leurs pieds détermineront la projection cherchée. Mais si par le centre de la sphère, on suppose un plan parallèle au plan de projection, il coupera la sphère suivant un grand cercle qui sera visiblement la projection de la sphère dans ce plan : or comme les projections sur deux plans parallèles ne peuvent être différentes, il s'ensuit que toute projection d'une sphère sur un plan, ne peut être qu'un grand cercle de cette sphère, dont le centre est, en même temps, la projection du centre de la sphère.

Supposons que le plan coupant soit perpendiculaire au plan vertical de projection ZAX, et qu'il le rencontre suivant BD; sa trace horizontale sera une perpendiculaire BC à AX; BD sera donc la trace du plan projetant du cercle d'intersection, et la partie M'N' en sera la projection verticale. Fig. 198

Si O' et O" sont les projections verticale et horizontale du centre O de la sphère, une perpendiculaire abaissée de O sur le plan coupant, le rencontrera en un point qui sera le centre du cercle cherché; il reste à trouver les projections de ce centre, et de plus le rayon du cercle d'intersection.

Si par O" on mène un plan vertical et parallèle à ZAX, ce plan dont la trace horizontale est HO", contiendra le centre de la sphère et la perpendiculaire parallèle au plan vertical ZAX, et conséquemment il contiendra le centre cherché. Donc O'G' sera en même temps la projection verticale et la

longueur vraie de la perpendiculaire ; G′ sera donc la projection verticale, et G″ la projection horizontale du centre du cercle demandé dont il reste à trouver le rayon. Le plan vertical projetant dont la trace est O″H, coupe la sphère suivant un grand cercle, et le cercle d'intersection suivant un diamètre, et comme ce cercle et ce diamètre se projettent verticalement, tels qu'ils sont dans l'espace, G′M′ sera le rayon cherché.

Si l'on imagine que le plan coupant tourne autour de sa charnière BC, jusqu'à venir s'appliquer sur le plan horizontal, le centre projeté en G′ et G″ décrira un arc de H comme centre, avec le rayon BG′, hypoténuse d'un triangle rectangle dont HG″, KG′ seront les deux côtés de l'angle droit ; et il se rabattra en G ; ensorte que le cercle MN décrit de G avec le rayon G′M′, sera celui qu'on cherche.

Problème LXXIV. *Trouver le centre et le rayon d'une sphère assujétie à passer par quatre points donnés.*

Comme on peut toujours faire passer un plan par trois points, nous prendrons, à l'effet de simplifier la construction et les considérations, pour plan horizontal celui de trois de
Fig. 199. ces quatre points, P, Q, R, par exemple ; et pour plan vertical celui qui passe par R et le quatrième point projeté horizontalement en S″ et verticalement en S, lequel est le point S lui-même.

Ayant déterminé le centre O″ du cercle qui passe par P, Q, R, il est clair que la verticale en ce point, ira passer par le centre O de la sphère ; O″ sera donc déjà la projection horizontale de ce centre : conséquemment sa projection verticale sera sur la perpendiculaire O″H à AX ; mais on sait que le centre d'une sphère se trouve sur un plan perpendiculaire sur le milieu de la ligne qui joint deux de ses points ; si donc on conçoit par le milieu M′ de RS un plan perpendiculaire à cette corde, sa trace verticale M′O′ ira passer par la projection verticale du centre, laquelle, ainsi que nous l'avons observé, doit se trouver sur RH, et conséquemment à l'intersection O′.

Les projections horizontale et verticale O'', O', S'', S des deux extrémités du rayon, donnent celles de cette ligne ; il sera donc facile de l'avoir en longueur (pag. 183 et 184).

Problème LXXV. *Trouver l'intersection de deux sphères données de grandeur et de position.*

Cette intersection sera un cercle : en effet, qu'on conçoive un plan vertical passant par les centres O, O' de ces deux sphères, ou par les verticales de ces deux centres, ce plan coupera ces sphères suivant les deux grands cercles IGE, IGF. Imaginons maintenant que ces cercles tournent autour de la ligne des centres OO', ils engendreront les sphères données ; dans ce mouvement, la ligne IG décrira le cercle d'intersection qui aura son centre en H et pour rayon HG, cercle dont le plan sera perpendiculaire à OO' : si on suppose ce plan rabattu sur celui de la planche, il sera facile de décrire le cercle cherché. Fig. 200

Problème LXXVI. *Trouver les points d'intersection de trois sphères données dont on connaît la position des centres et les rayons.*

C'est ce problème que nous avons choisi (pag. 176, Introd.) pour offrir un exemple de la possibilité de déduire la position d'un point de ses distances à trois autres points définis de position dans l'espace.

M, N, P étant les centres des trois sphères, on sait déjà que la commune section des deux premières, qui est un cercle, se trouvera dans le plan mené par GI perpendiculairement à celui des centres ; qu'aussi le cercle intersection des sphères M et P a son plan suivant *gi*, perpendiculaire au plan MNP. Mais les plans de ces deux cercles se coupent suivant une ligne passant par H, laquelle est aussi perpendiculaire au plan MNP, et aboutit aux deux intersections de ces cercles, dont l'une est au-dessus et l'autre au-dessous de MNP, et dont la commune projection horizontale est en H. Qu'on conçoive que les plans de Fig. 201.

ces cercles tournent d'abord autour de la ligne verticale des intersections, passant par H, jusqu'à ce que les deux plans n'en fassent qu'un, et qu'ensuite ce plan commun des deux cercles vienne s'appliquer sur le plan MNP; on pourra les décrire dans ce plan, puisqu'on en connaît les centres et les rayons: les extrémités de la droite menée par leurs intersections, et supposée dans sa véritable position, seront les points cherchés.

Nous terminerons ce titre par quelques notions sur un genre de surfaces courbes dont on a vu un exemple dans *la Géométrie* de *Legendre* (Prop. XVI, Liv. V), et qu'on nomme *surfaces gauches*.

Soit ABCD un trapèze dont le plan est horizontal : soient
202. aux points A, B, C, D quatre verticales inégales, et telles que les extrémités EGHF ne soient pas dans un même plan : ayant joint les points E, G, H, F, si on divise les droites opposées EG, FH en parties EI, FK proportionnelles aux lignes entières EG, FH, c'est-à-dire, de manière qu'on ait continuellement

$$EI : EG :: FK : FH,$$

qu'ensuite par tous les points correspondans I et K, on mène des droites IK, l'ensemble de toutes ces droites formera une surface courbe EGHF que l'on nomme *surface gauche*.

Le coin conoïde de *Wallis* est une de ces surfaces : nous donnerons sa génération. BDE′ est un quart de cercle situé
203. dans un plan vertical et parallèle à la ligne AC; si l'on conçoit qu'un autre plan vertical et perpendiculaire à cette ligne, se meuve parallèlement à lui-même, et qu'on joigne par des droites G′F′ les points où il rencontre, dans chacune de ses positions, la ligne AC et l'arc DE′, l'ensemble des droites G′F′ sera la surface gauche dont il s'agit.

En général la surface engendrée par une droite assujétie à glisser le long de trois droites ou de trois courbes, est *une surface gauche*.

Nous observerons que si, pour déterminer une surface

gauche, on ne doit satisfaire qu'à la seule condition qu'une droite s'appuie continuellement sur deux autres qui ne sont pas dans un même plan, il y aura lieu à plusieurs surfaces gauches ; car qu'un plan transversal se meuve en restant continuellement parallèle à un autre plan donné de position, ce plan transversal coupera toujours les deux droites ; et si l'on joint les deux points d'intersection dans chaque position du plan coupant, on aura des surfaces gauches différentes pour des positions différentes du plan auquel le plan coupant est parallèle.

Lorsqu'une droite doit s'appuyer continuellement sur trois autres qui, prises deux à deux, ne sont jamais dans le même plan, la surface gauche qui en résulte est unique. En effet, par un point pris sur l'une des trois directrices, on ne peut mener qu'une seule transversale qui s'appuie sur les trois droites, et il est facile de voir qu'on peut toujours en mener une ; car les directrices étant A, B, C, on peut, par un point de A, concevoir une transversale qui glisse le long de B jusqu'à ce qu'elle aille rencontrer C : ayant ainsi déterminé trois élémens de la surface gauche, on les considérera comme trois directrices qui serviront de la même manière à faire trouver trois autres élémens de la surface, et ainsi de suite.

Nous donnerons plus loin le volume d'un solide dont une des faces est une surface gauche.

Sur la pyramide triangulaire.

Théorème XXXXVI. Le volume de la pyramide est la somme des volumes de deux prismes et de deux pyramides, en adoptant la décomposition de *Legendre* (Prop. XVII et XVIII, Liv. VI). Soient h la hauteur de la pyramide donnée, b sa base, V son volume, V′ le volume de l'une des deux petites pyramides ; comme $\frac{h}{2}$ et $\frac{b}{4}$ sont la hauteur et la base d'un des prismes, on aura

$$V = \frac{bh}{4} + 2V'.$$

Si l'on décompose de la même manière V', et qu'on désigne par h', b' et V'' les quantités analogues à h, b et V', on aura

$$V' = \frac{b'h'}{4} + 2V'',$$

en continuant, on trouvera

$$V'' = \frac{b''h''}{4} + 2V'''$$
$$V''' = \frac{b'''h'''}{4} + 2V^{\text{IV}}.$$
etc.

Traduisant b', h'; b'', h''; b''', h''', etc. en b et h, les égalités précédentes se changeront en celles-ci :

$$V = \frac{bh}{4} + 2V'$$
$$V' = \frac{bh}{4.4.2} + 2V''$$
$$V'' = \frac{bh}{4.4.4.2.2} + 2V'''$$
$$V''' = \frac{bh}{4.4.4.4.2.2.2} + 2V^{\text{IV}}$$
etc.

Si dans la première de ces relations on écrit pour V' sa valeur tirée de la seconde, dans ce résultat la valeur de V'' tirée de la troisième, et ainsi de suite, on aura pour expression du volume V, cette progression décroissante et infinie

$$V = bh\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}\right\} = bh \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{bh}{3}.$$

Problème LXXVII. *Trouver le volume d'un tronc de pyramide, le plan sécant étant parallèle à la base.*

Soient B et H la base et la hauteur de la pyramide totale ; b et h' la base et la hauteur de la pyramide retranchée, et h la hauteur du tronc ou la distance entre les bases B et b; soit V le volume du tronc, on a

$$V = \frac{1}{3}(B \,.\, H - b \,.\, h').$$

Or

$$H^2 : h'^2 :: B : b, \text{ d'où } H = h'\sqrt{\frac{B}{b}}$$

et d'ailleurs

$$H = h' + h;$$

de ces deux égalités on déduit aisément

$$h' = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}, \quad H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}};$$

et conséquemment

$$V = \frac{1}{3} h \left\{\frac{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right\}.$$

La division de $B\sqrt{B} - b\sqrt{b}$ par $\sqrt{B} - \sqrt{b}$, donne pour quotient $B + \sqrt{B.b} + b$; donc le volume cherché est

$$V = \frac{1}{3} hB + \frac{1}{3} h\sqrt{B.b} + \frac{1}{3} hb,$$

où $\sqrt{Bb}$ est la base moyenne proportionnelle entre les bases supérieure b et inférieure B du tronc. On retrouve ainsi l'expression connue du volume d'un tronc de pyramide, et on parviendrait de la même manière à celle du tronc de prisme

Théorème XXXXVII. *La solidité de toute pyramide triangulaire, est le tiers de celle du parallélépipède circonscrit.*

Nous ferons précéder cette démonstration de quelques notions indispensables.

Les sommets des quatre angles d'une pyramide triangulaire quelconque étant A, B, C, D, si on les réunit trois à Fig. 204.

trois de toutes les manières possibles par des plans, on a les quatre faces

ABC, DAB, CDA, BCD;

si on les réunit deux à deux par des droites de toutes les manières possibles, on a les six arêtes

AB, CA, BC,
CD, BD, AD:

l'une quelconque de ces six arêtes étant prise à volonté, et passant par deux des quatre sommets, il y en a toujours une autre qui passe par les deux autres sommets, et qui n'ayant aucun point commun avec la première, ne peut pas être comprise avec elle dans un même plan. On peut regarder ces deux arêtes comme *opposées*. Nous avons écrit ces six arêtes de manière que celles qui se trouvent placées l'une au-dessus de l'autre, sont les opposées.

Si par deux arêtes opposées quelconques, on fait passer deux plans parallèles entre eux, ces deux plans dont la position sera déterminée, comprendront entre eux toute la pyramide: si donc on en fait autant pour les deux autres systèmes d'arêtes opposées, on aura six plans parallèles entre eux, deux à deux, et qui formeront un parallélépipède déterminé, circonscrit à la pyramide.

Des sommets des huit angles du parallélepipède circonscrit, quatre sont placés aux sommets de la pyramide, les quatre autres sont diagonalement opposés aux premiers, et les six arêtes de la pyramide sont chacune une diagonale d'une des faces du parallélepipède circonscrit. Enfin les distances des faces parallèles du parallélepipède sont respectivement égales aux plus courtes distances des arêtes opposées de la pyramide.

Avant d'en venir à la démonstration de la proposition, nous décrirons la figure. La pyramide que nous considé-
Fig. 205. rons est SACE, ayant pour base ACE et son sommet en S: ses six arêtes AC, AE, CE, SA, SC, SE sont diagonales dans les six faces du parallélepipède: les plans qui passent par deux arêtes opposées, savoir par AC et ES, AE et CS, AS et CE

sont parallèles, et les quatre sommets de la pyramide, S, A, C, E sont quatre des huit sommets du parallélepipède, et les quatre autres B, F, G, D sont diagonalement opposés à ceux-là.

Cela posé, nous démontrerons que les quatre pyramides GSEA, BCEA, FCES, DCSA dont les sommets sont G, B, F, D et les bases SEA, CEA, CES, CSA sont équivalentes.

Les deux pyramides GSEA, BCEA dont les faces sont

GEA, GES, GSA, AES
BEA, ACB, ECB, ECA

sont les mêmes que les pyramides SGEA, CBEA dont les sommets sont S et C, et les bases GEA, BEA. Or ces deux pyramides sont équivalentes, parce qu'elles ont des bases équivalentes, et leurs sommets S et C placés sur une ligne parallèle au plan de leurs bases : elles ont donc même volume. Les deux pyramides FCES, DCSA dont les faces sont

SFC, SFE, FCE, ESC
DSC, DCA, DSA, CSA

sont les mêmes que les pyramides EFCS, ASCD dont les sommets sont E et A, et les bases FCS, SCD : or ces deux pyramides sont équivalentes, parce qu'elles ont des bases équivalentes, et des sommets E et A placés sur une ligne parallèle au plan des bases. De plus, la pyramide CBEA ou ECBA, l'une des deux premières équivalentes, est équivalente à ECAD ou à SCAD qui est l'une des deux dernières.

Si donc on désigne par p le volume de la pyramide SACE, par p' celui de chacune des quatre autres pyramides égales entre elles, lesquelles ajoutées à p, font le volume du parallélepipède circonscrit, et enfin par P le volume de ce parallélepipède, on aura

$$p + 4p' = \mathrm{P}.$$

Je dis maintenant que $p = 2p'$, d'où il résultera que $p = \frac{1}{3}\mathrm{P}$.

Il s'agit donc de démontrer que la pyramide GSEA, par exemple, est la moitié de la pyramide SACE ou de la pyramide CSEA dont le sommet est C et la base est SEA. Or la pyramide CBDF dont le sommet serait C et la base BDF, aurait toutes ses faces égales aux faces de la pyramide GSEA ; et d'ailleurs les deux pyramides CBDF, CSEA ont leurs bases BDF, SEA égales : donc leurs volumes sont comme les hauteurs; mais les plans des bases BDF, SEA étant parallèles, si par A on imagine une perpendiculaire au plan BDF, laquelle sera en même temps perpendiculaire au plan AES, et si par C on imagine une perpendiculaire au premier de ces plans, ces perpendiculaires seront égales (pag. 172, Théor. XXXX), et comme la perpendiculaire menée de C sur le plan AES en est la somme, on en conclut que la hauteur de la pyramide CSEA est double de la hauteur de la pyramide CFDB, et qu'ainsi le volume p de la pyramide SACE est double du volume p' de la pyramide GSEA. Donc, etc.

Remarques.

1°. Il suffirait donc de prouver, sans supposer la mesure du volume d'une pyramide, que *les volumes de deux pyramides de même base sont comme les hauteurs*, proposition démontrée dans plusieurs *Traités de Géométrie*.

2°. Si les deux arêtes opposées d'un des trois systèmes sont égales, si, par exemple, l'arête EA est égale à l'arête SC, les deux diagonales de chacune des faces GB, SC deviennent égales entre elles, et ces faces sont des rectangles, ainsi qu'il est aisé de le demontrer.

3°. Si les deux arêtes opposées d'un second système sont aussi égales entre elles, quoiqu'elles ne le soient pas à celles du premier, deux autres faces opposées du parallélepipède circonscrit deviennent des rectangles.

4°. Si les arêtes opposées de chacun des trois systèmes, sont respectivement égales entre elles, le parallélepipède circons–

crit est rectangle ; et si, par chaque système de deux diagonales, dans deux faces opposées, on mène un plan, les intersections de ces plans mesureront les plus courtes distances entre ces faces ; ces trois plus courtes distances se couperont en un point qui sera le centre commun de la pyramide et du parallélepipède circonscrit ; et comme ces plus courtes distances sont, dans le cas dont il s'agit, respectivement égales à trois arêtes contiguës à un même angle trièdre du parallélepipède circonscrit, il s'ensuit que le volume d'une telle pyramide est égal au tiers du produit des trois plus courtes distances de ses arêtes opposées.

Pour le tétraèdre régulier dont les six arêtes sont égales entre elles, le parallélepipède circonscrit est un cube : les diagonales des quarrés qui sont les faces de ce cube sont égales aux arêtes du tétraèdre ; ainsi en nommant a la longueur commune de ces arêtes, le côté du cube, et par conséquent la distance des arêtes opposées, est $\frac{a}{\sqrt{2}}$, et le volume du tétraèdre est $\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$, comme on le trouve dans les élémens.

5°. Lorsqu'un parallélepipède est circonscrit à une pyramide triangulaire quelconque, chacune des arêtes de la pyramide est une des deux diagonales d'une des faces du parallélepipède : si dans chacune de ces faces on mène les secondes diagonales, elles seront les arêtes d'une seconde pyramide qui sera aussi inscrite dans le même parallélepipède, et dont le volume sera encore le tiers de celui de ce corps. Ainsi une pyramide triangulaire n'a qu'un seul parallélepipède circonscrit ; mais tout parallélepipède a deux pyramides inscrites qui ont même volume, sans être semblables, et qu'on peut regarder comme *conjuguées*.

Des deux pyramides conjuguées, l'une étant donnée, il est facile de former l'autre ; pour cela, il n'y a qu'à mener par le milieu de chacune des six arêtes de la première, une

droite parallèle et égale à l'arête opposée, et ces six droites seront les arêtes de la seconde pyramide.

6°. Les deux pyramides conjuguées et inscrites dans le parallélepipède circonscrit et commun, se pénètrent, et elles ont une partie commune que nous pouvons appeler *noyau*; ce noyau a huit faces sur chacune desquelles s'appuie l'une des huit pyramides qui ont pour sommets les huit angles trièdres du parallélepipède. Pour bien concevoir ce noyau octaèdre, on observera que ses six sommets sont les intersections des deux diagonales de chacune des faces du parallélepipède circonscrit, puisque l'une de ces diagonales est arête d'une pyramide, et l'autre arête de la conjuguée : maintenant si l'on joint les quatre intersections f, f', f'', f''', on aura un parallélogramme qui servira de base à deux pyramides quadrangulaires opposées dont les sommets seront les deux autres intersections g et g', et le solide ainsi formé de la réunion de ces pyramides quadrangulaires adossées, sera le noyau.

Nous appellerons *pyramides excédantes* celles qui s'appuient sur les huit faces du noyau, et qui ont pour sommets les huit angles solides trièdres du parallélepipède. Chaque pyramide excédante est semblable à l'une des deux pyramides conjuguées dont elle fait partie. Considérons la pyramide excédante qui a son sommet en G, et pour base le triangle $gf'f$; elle est semblable à la pyramide GFDB, qui est la conjuguée de SACE; car les arêtes Gf, Gf', Gg, fg, ff', $f'g$ sont les moitiés des arêtes GB, GD, GF, BF, BD, DF de la pyramide entière : donc le volume de la pyramide excédante n'est que le huitième de celui de la pyramide entière : donc encore la solidité de chacune des huit pyramides excédantes, n'est que le vingt-quatrième de celle du parallélepipède circonscrit.

Qu'au volume d'une des deux pyramides conjuguées, qui vaut $\frac{8}{24}$, en prenant celui du parallélepipède pour unité, on ajoute ceux des quatre pyramides excédantes de l'autre, pour ne prendre qu'une fois le volume du noyau, on aura $\frac{12}{24}$

pour le volume des deux pyramides conjuguées : si du volume de l'une des pyramides, on retranche la somme de ceux de ses quatre parties excédantes, on aura pour le noyau $\frac{4}{24}$: son volume est donc le $\frac{1}{6}$ de celui du parallélepipède, et la moitié de celui d'une des pyramides.

7°. Enfin les deux pyramides conjuguées laissent autant de petites pyramides vides qu'il y a d'arêtes dans le parallélepipède.

Pour ne pas laisser de difficultés sur ce qui suit, nous avons présenté toutes les pyramides dans la figure 206 : les faces d'une des deux grandes pyramides sont : Fig. 206.

135, 137, 157, 357,

et celles de la conjuguée sont :

246, 248, 268, 468.

Les faces qui se coupent sont celles où les chiffres qui manquent sont consécutifs, en observant que 1 est regardé comme consécutif à 8.

Les intersections des faces des deux pyramides, sont les arêtes de l'octaèdre *abcdef*, formé de deux pyramides quadrangulaires ayant leurs sommets en *a* et *c*, et pour base commune le parallélogramme *bedf*.

Les huit pyramides qui s'appuient sur les faces de l'octaèdre, sont :

1*adf*, 2*ade*, 3*aeb*, 4*afb*, 5*bfc*, 6*bec*, 7*ecd*, 8*cdf*.

Les pyramides voisines ou vides, sont celles qui ont deux lettres communes ; en prenant les lettres communes avec le chiffre qui est joint, on aura les quatre sommets de chaque pyramide vide.

Suivant ces combinaisons, les pyramides vides seront les douze suivantes :

12*ad*, 14*af*, 18*df*, 23*ae*, 27*ed*, 34*ab*,
36*be*, 45*bf*, 56*bc*, 58*cf*, 67*ce*, 78*cd*,

dans chacune desquelles il entre une des arêtes du parallélepipède circonscrit.

En considérant deux de ces pyramides vides contiguës, et leur donnant un sommet commun, il est facile de prouver qu'elles sont toutes équivalentes : conséquemment la somme de leurs volumes est $\frac{1}{24}$ de celui du parallélepipède.

On a encore ces deux propriétés :

1°. *En supposant six arêtes d'une de ces pyramides prolongées indéfiniment, si l'on en considère quatre quelconques opposées entre elles, deux à deux, il existe toujours un plan qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes dans quatre points qui sont toujours sur la circonférence d'un cercle; le diamètre de ce cercle varie suivant la position du plan, et il est le plus petit lorsque le plan passe par le centre du parallélepipède circonscrit. La position de ce plan est susceptible de deux solutions différentes.*

2°. *Si parmi les douze arêtes prolongées des deux pyramides conjuguées, on considère les huit qui sont dans quatre faces quelconques du parallélepipède, parallèles entre elles deux à deux, il existe un plan qui, en se mouvant parallèlement à lui-même, les coupe toutes en huit points qui sont toujours sur la circonférence d'un cercle; et ce plan est susceptible de deux positions différentes.*

Théorème XXXXVIII. *Si dans un tronc de pyramide triangulaire ABC, A'B'C', on prolonge les côtés BA et B'A' jusqu'à leur rencontre en L; les côtés CA et C'A' jusqu'à leur rencontre en M; les côtés CB et C'B' jusqu'à leur*
Fig. 207. *rencontre en N; qu'ensuite on mène les diagonales AB', BA' qui se coupent en* l, *les diagonales CA', C'A qui se coupent en* m, *et enfin les diagonales BC', B'C qui se coupent en* n; *les six points L, M, N,* l, m, n *sont dans un même plan.*

En effet les trois points

L, M, N	se trouvent placés sur la droite intersection du plan qui passe par les trois points	A, B, C	avec le plan qui passe par les trois points	A′, B′, C′
L, *m*, *n*		A, B, C′		A′, B′, C
l, M, *n*		A, B′, C		A′, B, C′
l, *m*, N		A′, B, C		A, B′, C′

Or deux quelconques de ces quatre droites d'intersection ayant un point commun, chacune d'elles va nécessairement couper les trois autres, et par conséquent ces quatre droites et les six points sont dans un même plan.

Problème LXXVIII. *Étant données les faces d'une pyramide tétraèdre ou triangulaire, trouver sur sa base le pié de la perpendiculaire abaissée du sommet, et cette perpendiculaire en longueur vraie, en ne faisant usage que du compas.*

Construction. Soit le triangle ABC la base de la pyramide, et soient ACE, BCD, ABF les plans triangulaires qui vont se réunir à son sommet qui est la réunion des trois points D, E, F; du centre C et du rayon CD = CE, soit décrit un arc qui passe par les points *e* et *d*; du centre B et du rayon BD soit décrit un arc qui le coupe en *d*; Fig. 208. du centre A et du rayon AE, soit décrit un arc qui le coupe en *e*. Le point P intersection des droites D*d*, E*e* sera le pié de la perpendiculaire. Si l'on divise la droite CE en deux parties égales au point *m*, que du centre *m* et du rayon *m*C on décrive la demi-circonférence C*p*E, et qu'on prenne la corde C*p* = CP, la corde supplémentaire *p*E sera la hauteur de la pyramide.

Démonstration. Nommons S la réunion des trois points D, E, F dans la pyramide formée : si l'on mène dans la face SCB ou DCB la perpendiculaire S*h* ou D*h* à CB, et à ce point *h* une perpendiculaire à CB, elle contiendra le point P; de même si du point S et dans la face SCA ou ECA, on mène à AC la perpendiculaire S*k* ou E*k*, et de ce

point k une perpendiculaire à AC, elle contiendra le point P; si l'on suppose que la face BSC de l'espace tourne autour de BC, jusqu'à venir se rabattre sur le plan de la base, la perpendiculaire Sh viendra se placer suivant Dh dans le prolongement de la perpendiculaire hd; donc le sommet S doit être verticalement au-dessus de hd, et conséquemment le pié de la perpendiculaire doit être sur hd; on prouverait de la même manière, qu'il doit être sur ke; donc, etc. De plus, les deux triangles CPS, CPE sont rectangles en P et p, et ils ont même hypoténuse $CS = CE$, et, par construction, $Cp = CP$; donc $PS = pE$; donc pE est la hauteur de la pyramide.

Théorème XXXXIX. *Les volumes de deux pyramides qui ont un angle trièdre égal, sont entre eux dans le rapport des arêtes contiguës à cet angle.*

En effet, menons A'B et A'C, nous formerons les deux pyramides A'SBC, A'SB'C', qui ayant même hauteur, parce qu'elles ont l'une et l'autre le sommet en A', sont entre elles comme les bases; on aura donc

Fig. 209. $$A'SBC : A'SB'C' :: SBC : SB'C' :: SB \times SC : SB' \times SC',$$

parce que les triangles SBC et SB'C' ont l'angle en S commun. Les deux pyramides BSAC, BSA'C qui ont le sommet en B, sont aussi dans le rapport de leurs bases ASC et A'SC; on aura donc

$$BSAC : BSA'C :: ASC : A'SC :: SA \times SC : SA' \times SC :: SA : SA';$$

multipliant cette proportion terme à terme par la première, il viendra

$$SABC : SA'B'C' :: SB \times SC \times SA : SB' \times SC' \times SA'.$$

Théorème L. *Si sur chacune des arêtes qui partent du sommet A d'une pyramide triangulaire, on prend à volonté des points* m, n, p *pour former le triangle* mnp *sur la surface de la pyramide, et qu'ayant supposé les diagonales Bn et*

Cm ; Cp et Dn ; Dm et Bp, on mène encore par le sommet A et les points d'intersection D', B', C' de Bn et Cm, Cp et Dn ; Dm et Bp, les transversales Aa, Aa', Aa'', nous démontrerons, Fig. 210.

1° Que les transversales Da, Ba', Ca'' se couperont toutes en un même point A' de la base BDC ;

2° Que les quatre transversales AA', BB', CC', DD' se couperont aussi en un même point K de l'espace.

1°. Chacun des triangles ABC, ACD, ABD est coupé par trois transversales partant de ses angles et se croisant dans un même point ; donc, d'après le théorème XV (Rec. de Théor. et Probl.), on a ces propriétés

$$Am \cdot Ba \cdot Cn = An \cdot Bm \cdot Ca$$
$$An \cdot Ca' \cdot Dp = Ap \cdot Cn \cdot Da'$$
$$Ap \cdot Da'' \cdot Bm = Am \cdot Dp \cdot Ba''.$$

Multipliant toutes ces égalités membre à membre et supprimant les facteurs communs, on aura

$$Ba \cdot Ca' \cdot Da'' = Ca \cdot Da' \cdot Ba''.$$

Donc, d'après le même théorème, les trois droites Da, Ba', Ca'' se coupent en un même point A'.

2°. La droite AA' est à la fois dans les trois plans ADa, ABa', ACa'' ; donc puisque Aa passe par l'intersection des droites Cm et Bn, la droite DD' sera dans le plan ADa qui contient AA', et par conséquent ces droites DD' et AA' se couperont. On prouvera de la même manière, que les droites AA', BB', CC', DD' se couperont toutes deux à deux ; donc la droite CC', par exemple, qui n'est pas dans le plan ADa qui contient DD', AA', coupe DD' ; d'ailleurs elle coupe AA' ; donc elle coupe en même temps DD' et AA', ce qui ne peut avoir lieu sans qu'elle passe par leur intersection. Donc les quatre droites AA', BB', CC', DD' se croisent trois à trois dans un même

point, et nécessairement elles se croisent toutes quatre au même point.

M. *Carnot* démontre encore dans l'ouvrage cité, que les plans prolongés *mnp*, C′D′B′ et CDB ont une intersection commune; mais comme l'auteur se fonde sur plusieurs théorèmes que nous n'avons pas fait connaître, nous ne pouvons que renvoyer à la lecture de la seconde partie de son travail, bien fait pour intéresser les amateurs de la belle Géométrie.

M. *Legendre* a résolu (Liv. V, Prop. XXIV et XXV) ces deux problèmes sur les pyramides triangulaires.

1° *Etant donnés les trois angles plans ou les trois faces, trouver l'angle que deux de ces faces font entre elles;*

2° *Etant données deux des trois faces et leur inclinaison, trouver la troisième face.*

En observant qu'il y a dans toute pyramide triangulaire, six choses à considérer, savoir, les trois faces et les trois inclinaisons, nous nous proposons ici de résoudre quelques questions ayant pour objet de déduire trois de ces six choses des trois autres supposées données.

Problème LXXIX. 1°. *Étant données deux faces et une inclinaison non comprise, construire la pyramide.*

Ainsi on donne les deux faces DSC, CSB, et l'angle de la face DSC avec la face indéterminée DSX, et il faut trouver cette dernière face, c'est-à-dire, construire la pyramide.

L'angle des deux faces DSC, DSX est celui des deux lignes d'intersection de ces deux faces par un plan perpendiculaire
Fig. 211. à leur commune arête SD; si on imagine que cet angle tourne autour de son côté DE jusqu'à venir se coucher sur la face CSD supposée dans le plan de la planche, il sera en FDE. Lors donc qu'on voudra se représenter la face illimitée ou inconnue DSX en position vraie, il faudra d'abord concevoir le plan de l'angle FDE vertical, et la face DSX tournant autour de l'arête DS,

jusqu'à venir s'appuyer sur DF. Alors si l'on imagine que la face donnée CSB qui est représentée dans le prolongement de DSC, tourne autour de l'arête SC, elle engendrera par son arête SB la surface d'un cône ayant son sommet en S ; et suivant la relation qui existera entre les angles FDE, CSB donnés, il arrivera que la surface de ce cône sera coupée suivant deux arêtes par la face illimitée, ou que celle-ci lui sera tangente, ou enfin qu'elle ne le rencontrera pas. Dans le premier cas, il y aura deux pyramides possibles ; une seule dans le second ; et enfin le problème sera impossible dans le dernier. Nous ne considérerons ici que le cas de deux intersections, parce qu'il renferme le second.

Du point D je mène un plan vertical perpendiculaire à l'arête SC ; il coupera la face illimitée en position vraie, suivant une droite, et la face donnée CSB, suivant une ligne qu'on voit en KG dans le rabattement de cette face sur le plan horizontal. Que la face CSB retourne dans sa position vraie, le point G décrira une circonférence GHLI dont le centre sera en K et le rayon KG, et dont le plan sera vertical : dans l'hypothèse que nous faisons, cette circonférence qui est la trace du point G dans l'espace, et qui est toute entière sur la surface conique décrite par SB, est rencontrée en deux points par l'intersection avec la trace illimitée du plan vertical mené par D et dont la trace horizontale est DK : il s'agit donc de trouver ces points de rencontre.

A cet effet, supposons au point K une verticale prolongée jusqu'à la rencontre de la face illimitée en position : si l'on conçoit par son extrémité, une parallèle à SD, ou une horizontale dans la face illimitée prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point F le côté DF en position, la verticale en K sera égale à la hauteur FE ; et les points de rencontre de la trace, dans la face illimitée, du plan vertical suivant DK, et de la circonférence GHLI en position, seront ceux qu'on cherche.

Imaginons maintenant que le triangle vertical formé par

DK, la verticale en K et la trace dans la face illimitée, tourne autour de DK comme charnière, jusqu'à se rabattre dans le plan de la face DSC ; la verticale passera toujours par K, et ne cessera pas d'être perpendiculaire à DK, conséquemment elle viendra se placer suivant KC ; et si l'on prend Km=EF, son extrémité tombera en *m* : d'ailleurs la circonférence décrite de K comme centre avec le rayon KG, rabattue sur le même plan, est GHLI : donc menant D*m*, et prolongeant cette ligne, les points de rencontre L et H seront ceux qu'on cherche.

En effet, qu'on se représente tout en position vraie, on verra aisément que les points L et S, H et S déterminent les deux limites de la face indéfinie. En observant que, dans toutes les positions de cette face autour de DS, le point L, par exemple, est toujours sur une circonférence décrite de D comme centre, avec DL comme rayon, circonférence qu'on peut décrire sur le plan horizontal, et qui est LX′, et qu'aussi ce point qui coïncidait avec G dans la pyramide formée, est toujours sur une autre circonférence décrite du centre S avec le rayon SG, et qu'on voit en GIX′, il sera facile de reconnaître que SX′ est une des limites. La seconde limite SX sera donnée par l'intersection X des circonférences HX et GX.

Il n'y a qu'une pyramide possible lorsque la ligne D*m* est tangente à la circonférence GHLI : le problème n'a pas de solution, lorsque cette ligne D*m* ne rencontre pas la circonférence.

Probléme LXXX. 2°. *Etant données deux inclinaisons et la face adjacente, trouver la troisième arête de la pyramide, ou les deux autres faces.*

Soit BSC la face donnée dans le plan horizontal ; soient FDE, F′D′E′ les deux inclinaisons connues, il s'agit de limiter les deux autres faces.

Fig. 212. Prenons sur les côtés DF, D′F′ en position dans l'espace, deux points G, G′, de manière que D*h* ou G*g* = G′*g*′, et menons par ces points qui seront à même hauteur au-dessus

du plan horizontal, des horizontales dans les faces illimitées; elles couperont l'arête inconnue en un point dont la projection horizontale K sera l'intersection des projections horizontales GK, G'K des horizontales menées par les points G et G' de l'espace.

Si l'on fait mouvoir les plans SD'F', SDF, qui sont les positions vraies des faces illimitées, l'un autour de SB, l'autre autour de SC, jusqu'à ce qu'ils viennent en BSX', CSX dans le plan horizontal, le point de l'arête inconnue dont K est la projection horizontale, viendra se rabattre sur l'un des points des perpendiculaires KL, KL' aux arêtes SC, SB; de plus ce point restera à une distance du sommet S égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui a pour côtés adjacents à l'angle droit, SK, *g*'G' ou G*g*; donc, dans le développement, ce point sera aussi sur le cercle décrit de S, comme centre, avec cette hypoténuse pour rayon, et par conséquent il se trouvera à la rencontre de ce cercle L'IL qu'on peut décrire dans le plan horizontal, et de chacune des perpendiculaires KL, KL'; donc DSL, D'SL' seront les faces cherchées.

Nous ferons connaître le procédé graphique qui donne la troisième inclinaison : on observera cependant qu'on peut employer la construction donnée par M. *Legendre*.

En supposant toujours la face BSC dans le plan horizontal, nous couperons la pyramide par un plan vertical XBC Fig. 213. qui rencontrera le premier suivant BC, ensorte que les deux autres faces seront SBX et SCX, et il s'agira de trouver l'angle entre ces deux faces, puisqu'on connaît déjà les autres inclinaisons. L'arête SX suivant laquelle se coupent les faces SCX, SBX, perce le plan horizontal en S et le plan vertical en X. Comme le point X a sa projection horizontale sur BC en R, et que S est dans le plan horizontal, RS sera la projection horizontale de l'arête SX. L'extrémité S est projetée verticalement en Q par la perpendiculaire SQ sur BC; l'autre extrémité X est sa propre projection verticale; donc QX est la projection verticale de l'arête SX.

Imaginons un plan perpendiculaire en un point quelconque de l'arête SX, et conséquemment perpendiculaire au plan SRX suivant lequel cette arête se projette horizontalement ; que sa trace horizontale soit, par exemple, MN : ce plan coupera les faces SCX, SBX suivant deux lignes qui formeront entre elles un angle opposé à MN, lequel sera l'angle cherché.

La trace horizontale MN sera perpendiculaire à la projection horizontale SR de l'arête SX, puisque MN et SR sont les intersections de deux plans perpendiculaires entre eux par un troisième plan qui est BSC.

La droite menée du sommet de l'angle cherché à l'intersection P de SR et MN, est la hauteur du triangle formé par MN et par les deux côtés de cet angle, ce qu'il est facile de voir, en observant que la projection horizontale de son sommet, est en quelque point de RS, trace horizontale du plan projetant de RX qui contient ce sommet.

Si l'on fait tourner ce triangle autour de MN, comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne se coucher sur le plan horizontal vers S, sa hauteur passera toujours par P, et ne cessera pas d'être perpendiculaire à MN en ce point, ensorte que l'autre extrémité qui est le sommet de l'angle, viendra se rabattre sur un des points de la droite PS en T, par exemple ; on connaîtra donc la troisième inclinaison MTN.

Pour trouver la longueur vraie de la hauteur PT, supposons que le triangle SRX tourne autour de RX comme charnière, jusqu'à venir s'appliquer sur le plan vertical ; le point S décrira dans ce mouvement un arc SS′ de R comme centre, avec le rayon RS, ensorte que l'arête SX se placera en XS′; le point P aura décrit l'arc PP′ de même centre et avec le rayon RP : si du point P′ on mène P′P″ perpendiculaire sur S′X, on aura la hauteur PT qui, comme nous l'avons vu, fait trouver le point T, et conséquemment l'angle cherché MTN.

Problème LXXXI. 3°. *Connaissant dans une pyramide deux faces et l'inclinaison comprise, déterminer la troisième face.*

Soient BSC, BSD les deux faces données développées sur le plan de la face BSC, supposée horizontale : ayant mené un plan ABD perpendiculaire à la droite SB, lequel coupe la première face suivant BD, et la seconde suivant AB; l'angle FBD de AB avec BD sera l'inclinaison donnée de la face ASB sur la face BSC. L'arête SA partant de sa position dans l'espace, et tournant autour de SB comme axe, engendre la surface d'un cône droit dont la section par le plan vertical ABD qui contient l'angle FBD, est le cercle A*a*F dont le centre est B et le rayon BF = BA, cercle dont nous supposerons le plan rabattu sur le plan horizontal. Le point F en position vraie, dont la projection horizontale est D, appartient à l'arête cherchée dans l'espace. Qu'on fasse tourner cette arête autour de SC comme axe, elle engendrera la surface d'un cône droit, et le point F, en tant qu'il appartient à l'arête inconnue SX, décrira un cercle dont le plan DEL est perpendiculaire à SC : la troisième face cherchée étant ainsi appliquée dans le plan horizontal, le point F doit tomber sur DL, et parce que sa distance à S n'a pas varié, il doit être sur le cercle décrit de S, comme centre, avec le rayon SA : ce point est donc en L, et la face cherchée est CSL. Fig. 214.

Problème LXXXII. 4°. *Etant données les trois faces d'une pyramide, trouver les trois inclinaisons.*

Supposons la pyramide développée sur le plan de la face BSC qui est toujours celui de la planche, ensorte que les deux autres faces soient en CSD, BSD′ : après avoir pris SD = SD′, nous mènerons par D et D′ deux plans perpendiculaires aux arêtes SC et SB, dont les traces horizontales seront DO, D′O. Si on imagine la pyramide formée, les droites EO et ED, E′O et E′D′ formeront deux angles qui mesureront les inclinaisons des faces CSD, BSD′ sur la face BSC. Il s'agit donc de trouver graphiquement ces angles. Les points D et D′ réunis en un seul dans l'espace, ont pour projection horizontale le point O, puisque dans les mouvemens de rotation des faces CSD, BSD′ autour des Fig. 215.

charnières SC, SB, ils décrivent des arcs de cercle, dont les projections horizontales sont DEO, D'E'O; ensorte que la hauteur de D ou de D' au-dessus de O, les droites OE et ED forment un triangle rectangle dans lequel l'angle opposé à la verticale est l'inclinaison de CSD sur BSC : l'angle OE'D' en position est aussi l'inclinaison de BSD' sur BSC. Si on fait tourner le triangle OED en position vraie, autour de OE comme charniere, jusqu'à ce qu'il se rabatte sur le plan horizontal, la hauteur verticale tombera suivant OK perpendiculaire à OE ou parallèle à EC; l'hypoténuse ED n'aura pas varié de longueur : ainsi décrivant de E comme centre avec le rayon ED, un arc de cercle DK, l'angle OEK sera l'inclinaison de la face CSD sur BSC. On trouvera, par la même construction, l'angle OE'K', inclinaison de l'autre face D'SB sur BSC. On doit avoir OK' = OK, puisque dans l'espace, les points K et K', D et D' se réunissent en un seul.

Il reste à trouver la troisième inclinaison, question résolue précédemment.

Problème LXXXIII. 5°. *Etant données toutes les arêtes d'une pyramide, la construire.*

M, N, P étant les centres de trois sphères, nous avons vu
Fig. 201. (pag. 197, Prob. LXXVI) que l'intersection des deux premières est un cercle dont le plan vertical passe par GI, et que l'intersection de la première et de la troisième est pareillement un cercle dont le plan vertical a pour trace horizontale *gi*. Le point H qui est la projection de la ligne suivant laquelle se coupent ces deux plans verticaux, sera en même temps celle des points d'intersection des trois sphères.

Si maintenant on relève les triangles MP*g*, NPK, NMI, en les faisant tourner autour des lignes PM, PN, NM, comme charnières, les points *g*, K et I se réuniront dans l'un des points d'intersection ci-dessus, par exemple, dans le point supérieur au plan de la planche, et il se formera une pyramide dont la base est le triangle MNP qui est dans le

plan de la planche. Il est facile de conclure de là la solution de l'énoncé.

Théorème LI. *Si par le sommet d'un angle trièdre, on mène des droites perpendiculaires à chacune de ses faces, les plans qui contiennent ces lignes deux à deux, formeront un nouvel angle trièdre dans lequel les angles entre les arêtes seront égaux aux angles ou aux inclinaisons des faces du premier, et les angles entre les arêtes de celui-ci, seront égaux aux inclinaisons des faces du nouvel angle trièdre.*

Nous avons démontré (Réc. de Théor. et Prob., Théor. XXXX) que *si par un point quelconque de la commune intersection de deux plans, on élève une perpendiculaire à chacun de ces plans, l'angle de ces lignes sera le même que celui des deux plans.*

Soit A*e* la perpendiculaire à la face AFG ; elle le sera par conséquent aux lignes AG, AF menées par son pied dans le plan AFG ; en raisonnant de même pour A*f*, A*g* respectivement perpendiculaire aux faces AEG, AEF, on conclura que Fig. 216.

A*e* perpendiculaire sur AFG, l'est sur AF, AG
A*f* perpendiculaire sur AEG, l'est sur AE, AG
A*g* perpendiculaire sur AEF, l'est sur AE, AF;

mais, 1° AE en même temps perpendiculaire sur A*f*, A*g*, l'est au plan *f*A*g*;

2° AF en même temps perpendiculaire sur A*e*, A*g*, l'est au plan *e*A*g*;

3° AG en même temps perpendiculaire sur A*e*, A*f*, l'est au plan *e*A*f*.

Or, d'après le lemme, les lignes A*e*, A*g* font entre elles le même angle que les plans ou faces AFG, AEF auxquels elles sont respectivement perpendiculaires ; il en sera de meme de l'angle entre les arêtes AE, AG, comparé à l'angle entre les plans *f*A*g*, *e*A*f*. Donc les angles entre les arêtes de l'un des

angles trièdres, sont égaux aux angles entre les faces de l'autre, et inversement.

Remarque.

Ces six questions qu'on peut se proposer sur la pyramide triangulaire, savoir :

1° *Trois faces étant données, trouver les trois inclinaisons;*

2° *Trois inclinaisons étant données, trouver les trois faces;*

3° *Deux faces et l'inclinaison comprise étant données;*

4° *Deux inclinaisons et une face adjacente étant données;*

5° *Deux faces et une inclinaison non comprise étant données;*

6° *Deux inclinaisons et une face à laquelle une seule de ces inclinaisons est adjacente, étant données,*

Construire la pyramide,

peuvent encore être réduites à trois, par la considération de la pyramide supplémentaire dont nous allons indiquer la construction.

Théorème LII. *Chacun des six angles d'une pyramide, savoir, les trois angles entre les arêtes et les trois angles entre les faces, a pour supplément l'un des angles de la pyramide formée par trois plans perpendiculaires à ses arêtes.*

a, *b*, *c* étant les trois arêtes de la pyramide proposée, celle qui est formée par trois plans dont chacun est perpendiculaire à chacune de ces arêtes, jouit de cette propriété que chacune de ses inclinaisons a son supplément parmi les angles entre les arêtes de la proposée. Pour le démontrer, qu'on se représente une des faces de la pyramide proposée, par exemple, la face *ab*, les plans de deux des faces qui appartiennent à la nouvelle pyramide et qui sont perpendiculaires l'un à l'arête *a*, l'autre à l'arête *b*, coupent cette face *ab*, suivant deux droites dont l'inclinaison mesure celle des plans;

or dans le quadrilatère formé par ces deux droites et les arêtes *a* et *b*, il y a deux angles droits ; donc les deux autres angles de ce même quadrilatère, sont supplémens l'un de l'autre ; donc l'angle entre les arêtes *a* et *b* est supplément de l'angle compris entre les deux plans qui appartiennent à la nouvelle pyramide. On verra de la même manière que les angles entre *b* et *c* ; *a* et *c* sont supplémens des angles qui mesurent les inclinaisons des plans perpendiculaires aux arêtes *b* et *c* ; *a* et *c*.

Si on nomme a', b', c' les arêtes de cette seconde pyramide, celle dont elle dérive est formée par les trois plans perpendiculaires aux droites a', b', c' ; donc l'angle de deux quelconques de ces plans, de ceux, par exemple, qui sont perpendiculaires aux arêtes a' et b', est supplément de l'angle compris entre ces deux arêtes. Donc, etc.

Cette propriété a fait nommer l'une de ces pyramides *la supplémentaire de l'autre.*

Corollaire. Ainsi connaissant les trois inclinaisons A, B, C d'une pyramide, si l'on veut trouver les trois faces ou les trois angles entre les arêtes, on prendra les supplémens des angles A, B, C pour les angles entre les arêtes d'une nouvelle pyramide, on déterminera les inclinaisons de celle-ci, et leurs supplémens seront les angles cherchés. On rapportera de la même manière les quatrième et sixième combinaisons aux troisième et cinquième.

Problème LXXXIV. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire dont les quatre sommets sont donnés.*

Si l'on suppose, pour simplifier, que l'une des faces de la pyramide soit dans le plan horizontal de projection, on pourra déterminer les plans des trois autres faces, puisque chacun de ces plans doit passer par trois points donnés. Que par chacun des côtés de la face horizontale, on mène un plan qui divise également l'angle entre cette face et celle qui la rencontre suivant le côté par lequel est conduit le plan, tout se réduira à trouver les projections horizontales et verticales

des intersections de ces trois plans pris deux à deux ; ces intersections se couperont en un point qui sera le centre de la sphère, donné par ses projections, et on en conclura celles du rayon, et conséquemment sa longueur vraie. Nous avons supprimé les détails des constructions, parce qu'ils nous auraient mené trop loin.

La question de circonscrire une sphère à une pyramide, revient à celle qui a été résolue (page 196, prob. LXXIV).

Des Polyèdres.

Théorème LIII. *Le quarré de la diagonale de tout parallélepipède rectangle, est égal à la somme des quarrés de ses trois arêtes.*

Fig.217. Soit BL un parallélepipède rectangle dont AK est la diagonale et dont AB, AC, AD sont les arêtes; je dis qu'on aura $\overline{AK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2$. Joignons AI; le triangle AIK, rectangle en I, donne $\overline{AK}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{IK}^2$; le triangle rectangle ACI donne

$$\overline{AI}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2;$$

donc puisque IK = AD et IC = AB, on aura

$$\overline{AK}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2;$$

proposition déjà démontrée (pag. 185).

Corollaire I. Multipliant par 4 les deux membres de cette égalité, il vient

$$\overline{4AK}^2 = \overline{4AB}^2 + \overline{4AC}^2 + \overline{4AD}^2;$$

d'où l'on voit que *dans tout parallélepipède rectangle, la somme des quarres des côtés est égale à la somme des quarrés des diagonales :* proposition que M. *Legendre* a étendue à un parallélepipède quelconque (Prob. V, note V), et que nous

allons déduire comme corollaire d'un théorème plus général sur l'hexaèdre irrégulier.

Corollaire II. Du théorème précédent, il suit que, dans un cube, le quarré de la diagonale est égal au triple du quarré d'un des côtés. En effet, soient AK un cube quelconque, et AK sa diagonale ; on aura

$$\overline{AK}^2 = 3\overline{AB}^2; \text{ d'où } AK : AB :: \sqrt{3} : 1.$$

D'où l'on voit (Géom., Liv. IV, Prop. IV, Schol.) que *la diagonale d'un cube quelconque, est le côté d'un triangle équilatéral inscrit à un cercle décrit avec un rayon égal au côté de ce cube.*

Problème LXXXV. *Connaissant les côtés d'un parallélepipède rectangle, trouver la diagonale et les angles qu'elle forme avec les côtés.*

On a, en désignant par a, b, c, d les côtés AB, AC, AD, AE, Fig. 218.

$$\overline{AF}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CF}^2;$$

donc

$$\overline{AE}^2 = d^2 = \overline{AF}^2 + \overline{EF}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les angles ABE, ACE, ADE étant droits, leurs sinus seront égaux au rayon que nous supposerons égal à l'unité ; les angles AEB, AEC, AED seront les complémens des angles BAE $= \alpha$, EAC $= \beta$, EAD $= \gamma$, et les triangles ABE, AEC, AED donneront

$$\left.\begin{array}{l} AE : AB :: \sin ABE : \sin AEB \\ AE : AC :: \sin ACE : \sin AEC \\ AE : AD :: \sin ADE : \sin AED \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} d : a :: 1 : \cos\alpha \\ d : b :: 1 : \cos\beta \\ d : c :: 1 : \cos\gamma. \end{array}\right.$$

on aura donc

$$(1) \ldots d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(2) \ldots \cos\alpha = \frac{a}{d}, \quad (3) \ldots \cos\beta = \frac{b}{d}, \quad (4) \ldots \cos\gamma = \frac{c}{d};$$

on tire de là, 1°

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{a^2+b^2+c^2}{d^2}=1\ldots.(5);$$

formule déjà obtenue (pag. 189, Théor. XXXV, Lem.); 2°

$$(6)\ldots.\ \frac{b}{a}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\qquad \frac{a}{c}=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\qquad \frac{b}{c}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Les angles γ', β', α' formés par la diagonale AE avec les faces ABFC, ABGD, ACID étant les complémens des angles γ, β, α formés par la même diagonale avec les perpendiculaires AD, AC, AB à ces faces, on aura

$$(7)\ldots.\ \sin\alpha'=\cos\alpha=\frac{a}{d},\quad \sin\beta'=\cos\beta=\frac{b}{d},$$
$$\sin\gamma'=\cos\gamma=\frac{c}{d}.$$

Si l'on tire les diagonales AF, AG, AI, les angles ABF, ADG, ADI étant droits, on trouvera

$$(8)\ldots.\begin{cases}\text{tang FAB}=\dfrac{\text{BF}}{\text{BA}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\\ \text{tang GAD}=\dfrac{\text{GD}}{\text{DA}}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\\ \text{tang IAD}=\dfrac{\text{DI}}{\text{DA}}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}.\end{cases}$$

Ces huit formules sont d'un très-grand usage dans l'analyse géométrique. Nous allons en tirer d'autres conséquences.

Corollaire. Des égalités (2), (3) et (4) on déduit encore

$$\frac{ab}{d^2}=\cos\alpha\cos\beta,\quad \frac{ac}{d^2}=\cos\alpha\cos\gamma,\quad \frac{bc}{d^2}=\cos\beta\cos\gamma;$$

ensorte que la surface totale S du parallélepipède rectangle est

$$S=2(ab+ac+bc)=2d^2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma),$$

et son volume V est

$$V = abc = d^3 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

Voyez la *Géométrie de Legendre* (Note V, Prob. IV et V).

Théorème LIV. *Dans tout prisme quadrangulaire, la somme des quarrés des côtés, excède celle des quarrés des diagonales, de huit fois le quarré de la ligne qui joint leurs milieux.*

En effet, soit DG un prisme quadrangulaire, soit O le point d'intersection des deux diagonales DG, BE, et P celui des diagonales AF, CH. Les parallélogrammes BGED, ACFH donnent Fig. 219

$$\overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 = 2\overline{DE}^2 + 2\overline{BD}^2,$$
$$\overline{AF}^2 + \overline{CH}^2 = 2\overline{DE}^2 + 2\overline{AC}^2.$$

Ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient (Récip. Liv. III, Prop. XI).

$$\overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{CH}^2 = 4\overline{DE}^2 + 2(\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2)$$
$$= 4\overline{DE}^2 + 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2 + 2\overline{AD}^2 - 8\overline{MN}^2,$$

M et N étant les milieux des diagonales BD, AC. Or joignons MO et NP : chacune de ces lignes sera parallèle à DE et égale à $\frac{1}{2}$ DE ; donc la figure MNPO est un parallélogramme ; donc OP = MN. Donc

$$\overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{CH}^2$$
$$= 4\overline{DE}^2 + 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2 + 2\overline{AD}^2 - 8\overline{OP}^2,$$

d'où

$$4\overline{DE}^2 + 2\overline{AB}^2 + 2\overline{BC}^2 + 2\overline{CD}^2 + 2\overline{AD}^2$$
$$= \overline{BE}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{AF}^2 + \overline{CH}^2 + 8\overline{OP}^2.$$

Donc, etc.

Cette proposition est l'analogue de celle qui a été démontrée (n° cité) : nous la généraliserons dans le Théorème suivant.

Théorème LV. *Sur l'hexaèdre irrégulier.*

Fig. 220. Soit l'hexaèdre irrégulier Ac, pour lequel nous poserons

$$Aa=a\,,\quad Cc=b\,,\quad ab=e\,,\quad cd=f$$
$$bc=g\,,\quad ad=h\,,\quad ac=m\,,\quad bd=m'$$
$$Bb=A\,,\quad Dd=B\,,\quad AB=E\,,\quad CD=F\,,\quad aC=d\,,\quad Ac=d'$$
$$BC=G\,,\quad AD=H\,,\quad AC=M\,,\quad BD=M',\quad bD=D\,,\quad Bd=D'.$$

La droite qui joint les milieux des diagonales

$$DD'=P\,,\quad MM'=Q\,,$$
$$dd'=p\,,\quad mm'=q.$$

Cela posé, les quadrilatères *abcd*, ABCD donnent (Récip., Liv. III, Prop. IX)

$$m^2+m'^2=e^2+f^2+g^2+h^2-4q^2$$
$$M^2+M'^2=E^2+F^2+G^2+H^2-4Q^2;$$

les quadrilatères BD*db*, AC*ca* fourniront de même

$$A^2+B^2+m'^2+M'^2=D^2+D'^2+4P^2,$$
$$a^2+b^2+m^2+M^2=d^2+d'^2+4p^2.$$

Ajoutant ces dernières égalités et substituant pour $m^2+m'^2$ et $M^2+M'^2$ leurs valeurs tirées des deux précédentes, on aura

$$\left.\begin{array}{l}a^2+b^2+e^2+f^2+g^2+h^2\\+A^2+B^2+E^2+F^2+G^2+H^2\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}d^2+d'^2+D^2+D'^2\\+4p^2+4q^2+4P^2+4Q^2,\end{array}\right.$$

formule qui, traduite en langage ordinaire, fournirait l'énoncé d'un beau théorème relatif aux hexaèdres dont les côtés forment des quadrilatères quelconques.

Corollaire. Lorsque toutes les faces d'un hexaèdre devien-

nent des parallélogrammes, les lignes P, p, Q, q sont nulles; de sorte que l'équation précédente se réduit à

$$4A^2 + 4E^2 + 4G^2 = D^2 + D'^2 + d^2 + d'^2.$$

Théorème LVI. *Si une ligne AB est divisée en deux parties AI, IB, le cube construit sur la ligne entière AB, sera*

$$(AI + IB)^3 = \overline{AB}^3 = \overline{AI}^3 + \overline{BI}^3 + \overline{3AI}^2 \times BI + \overline{3BI}^2 \times AI.$$

Théorème LVII. *Le cube construit sur la différence AI de deux lignes AB, BI, sera*

$$(AB - BI)^3 = \overline{AB}^3 - \overline{BI}^3 - \overline{3AB}^2 \times BI + 3AB \times \overline{BI}^2.$$

Nous laissons à démontrer par la Géométrie ces deux propositions qui reviennent aux formules connues d'algèbre

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

lesquelles expriment la formation du cube d'un binome.

Théorème LVIII. *Soit ABCDEMN, etc. un polyèdre quelconque; si l'on joint les sommets de tous ses angles A, B, etc., avec un point S situé où l'on voudra; je dis qu'en divisant les lignes SA, SB, etc. en parties proportionnelles, on formera un second polyèdre A'B'C'D'E'M'N', etc. qui sera semblable au premier.* Fig. 221.

En effet, les triangles ABS et A'B'S semblables entre eux, donnent la proportion

$$AB : A'B' :: SB : SB',$$

on aura pareillement

$$BC : B'C' :: SB : SB' :: SC : SC',$$
$$CD : C'D' :: SC : SC' :: SD : SD',$$
$$DE : D'E' :: SD : SD', \ldots$$

Or ces proportions étant liées entre elles par des rapports communs, on aura

$$AB : A'B' :: BC : B'C' :: CD : C'D', \text{ etc.}$$

En outre les angles ABC, A'B'C', etc. sont égaux, donc les bases sont semblables.

Maintenant les plans NAC et ACB étant parallèles à leurs homologues N'A'C', A'C'B', l'angle dièdre NACB est égal à l'angle dièdre N'A'C'B' : les triangles ABC et NAC sont semblables aux triangles A'B'C', N'A'C' : donc les points N et N' sont déterminés par des pyramides semblables. Il en est de même de tout autre sommet M. Donc, etc.

Problème LXXXVI. *Evaluer le volume d'un solide terminé par un plan horizontal, par quatre plans verticaux parallèles deux à deux et par une portion de surface gauche.*

Lemme Ier. *Si par les extrémités A, B, C, D de deux*
Fig. 222. *parallèles AB, CD, on mène hors du plan ABCD quatre droites parallèles AA'', BB'', CC'', DD'' égales deux à deux, savoir AA'' = BB'', DD'' = CC'', les extrémités A'', B'', C'', D'' sont dans un même plan.*

Car si les trois points A'', B'', C'', D'' n'étaient pas dans un même plan, le plan mené par les trois points A'', B'', C'' couperait DD'' en un point d tel, que l'on aurait Dd = CC''; car tout plan mené par les points A'' et B'' rencontre les deux autres parallèles menées par C et D, de telle manière qu'on a toujours CC'' = DD'', comme il est aisé de le démontrer. Donc on aurait CC'' = DD'' = Dd, ce qui est absurde. Donc, etc.

Passons à la solution de l'énoncé.

Le plan horizontal est ABCD, les quatre plans verticaux sont
Fig. 223. ABB'A', BCC'B', DCC'D', ADD'A', et la surface gauche est A'B'C'D'. Cette surface gauche est engendrée par une droite indéfinie SS' qui se meut parallèlement au plan fixe ABA'B', en s'appuyant sur les deux droites A'D', B'C' qui ne sont pas

dans un même plan. Il résulte de cette génération que toute section de la surface gauche par un plan parallèle au plan ABB'A' est une droite KK', puisque cette intersection n'est qu'une des positions de la génératrice. Si les droites A'D', C'C' étaient parallèles, la surface A'B'C'D' deviendrait un plan.

Les arêtes AA', BB', CC', DD' étant prolongées de manière qu'on ait

$$A'A'' = BB' = a, \quad B'B'' = AA' = a', \quad D'D'' = CC' = b, \quad C'C'' = DD' = b',$$

les quatre points A'', B'', C'', D'' seront dans un même plan, d'après le lemme. Si l'on représente par V le volume ABCDA'B'C'D' et par V' le volume ABCDA''B''C''D'', je dis qu'on aura $V = \frac{1}{2} V'$; ce qui se réduit à prouver que toute section RMQP du solide V' par un plan parallèle au plan ABB''A'' est divisée en deux parties égales par un élément K'K de la surface gauche, ou, en d'autres termes, que les trapèzes RMKK' et KK'PQ sont équivalens. A cet effet, soit la diagonale B'C dans la face BCC'B' : on aura

$$\left.\begin{array}{l} EM : BB' :: CE : CB' :: C'K : C'B' \\ EK : CC' :: B'K : B'C' \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} EM = a \times \dfrac{C'K}{C'B'} \\ EK = b \times \dfrac{B'K}{C'B'} \end{array}\right.$$

et conséquemment

$$EM + EK = MK = a \times \frac{C'K}{C'B'} + b \times \frac{B'K}{C'B'} \ldots\ldots (1)$$

Les trois plans parallèles ABB''A'', RMQP, DCC''D'' coupent les droites A'D', B'C' en partie proportionnelle (Géom., Liv. V, Prop. XV) ; de sorte que menant la diagonale A''D',

dans la face A′D′A″D″, on aura

$$\left.\begin{array}{l} B'K : B'C' :: A'K' : A'D' :: E'P : D'D'' \\ E'K' : A''A' :: D'K' : D'A' :: C'K : C'B' \end{array}\right\}\text{d'où}\left\{\begin{array}{l} E'P = b \times \frac{BK'}{B'C'} \\ E'K' = a \times \frac{C'K}{C'B'} \end{array}\right.$$

On déduit de là

$$E'K' + E'P = PK' = a \times \frac{C'K}{C'B'} + b \times \frac{BK'}{C'B'} \ldots (2)$$

et des relations (1) et (2) l'égalité des droites MK, PK′. On prouverait de même que RK′=QK. Ainsi les trapèzes RMKK′, K′KQP ont même surface, puisqu'ils ont même hauteur, et que les côtés parallèles sont égaux deux à deux.

Cela posé, le solide V′ peut être considéré comme composé de deux prismes triangulaires tronqués, ayant pour bases ADC, ABC : or (Géom., Liv. VI, Prop. XXII)

$$ADCA''D''C'' = \tfrac{1}{3}\,ADC\,(AA'' + DD'' + CC'')$$
$$ABCA''B''C'' = \tfrac{1}{3}\,ABC\,(AA'' + BB'' + CC'');$$

ajoutant ces égalités membre à membre, et observant que les triangles ADC, ABC sont égaux, que V′ = 2V, et que

$$AA'' = BB'' = a + a', \quad CC'' = DD'' = b + b',$$

il vient, en représentant la base ABCD par s

$$2V = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\,s\,(3AA'' + 3CC'') = \tfrac{1}{2}\,s\,(AA'' + CC'')$$
$$= \tfrac{1}{2}\,s\,(a + a' + b + b').$$

Donc enfin

$$V = s\left(\frac{a + a' + b + b'}{4}\right).$$

Cette formule remarquable par son élégante simplicité, est d'un fréquent usage dans le calcul des *deblais* et des *remblais*.

Théorème LIX. *Si par un point quelconque pris dans l'espace, on fait passer plusieurs polygones égaux et parallèles chacun à chacune des faces d'un polyèdre quelconque, et présentant au point la même face qu'elle, la somme des produits de la surface de chacun de ces polygones par la perpendiculaire abaissée d'un autre point quelconque de l'espace, sera égale à zéro, en observant de prendre négativement celle de ces perpendiculaires qui tombent sur le revers de ces polygones* (*).

Nous démontrerons d'abord ce théorème sur des figures planes, et nous l'étendrons ensuite aux polyèdres.

Soit d'abord un triangle BAC; si on prend dans l'intérieur de ce triangle deux points m, m', desquels on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, et qu'on joigne chacun de ces points aux sommets A, B, C, en désignant par a, b, c les côtés opposés aux angles A, B et C, on aura Fig. 224

$$a(mk - m'k') + b(ml - m'l') + c(mh - m'h') = 0.$$

Maintenant si par le point m' on mène trois lignes A'C', A'B', B'C' égales et parallèles aux côtés AC, AB, BC, et qu'on prolonge lm jusqu'à la rencontre de A'C' en q, la propriété ci-dessus deviendra

$$a \times mn - b \times mq + c \times mp = 0,$$

en observant que le terme $b \times mq$ est négatif, parce que la perpendiculaire mq tombe sur le revers de la ligne A'C', considérée comme une nouvelle position de la ligne AC qui aurait été transportée parallèlement à elle-même jusqu'à venir passer par m'. Dans le même mouvement, les autres droites présentent, si on peut le dire, la même face au point m, et les produits de ces droites par les perpendiculaires menées de m, sont positifs.

(*) Cet énoncé ne peut être bien saisi qu'à la lecture de la démonstration.

Fig. 225. Dans le quadrilatère ABDC, on aura de même, en faisant $AB = a$, $BD = b$, $DC = c$, $CA = d$,

$$a(mk - m'k') + b(ml - m'l') + c(mh - m'h') + d(mi - m'i') = 0.$$

Si les côtés du quadrilatère se meuvent parallèlement à eux-mêmes jusqu'à venir passer par le point m', et qu'on prolonge les perpendiculaires menées du point m jusqu'à ces parallèles aux côtés a, b, c, d, la propriété ci-dessus deviendra

$$-a \times mn + b \times mp + c \times mq - d \times mr = 0,$$

où l'on observera encore que les produits négatifs sont donnés par les côtés du quadrilatère, qui, déplacés, offrent le revers au point m de départ des perpendiculaires.

Il est maintenant facile d'étendre la proposition aux polygones et aux polyèdres, quel qu'en soit le nombre des côtés et des faces. En effet, pour ces derniers, si l'on prend toujours dans l'intérieur du solide deux points m et m', qu'on les joigne avec tous les sommets des angles solides, et que de ces points on abaisse des perpendiculaires sur les faces, on aura décomposé le polyèdre en autant de pyramides qu'il y a de faces, pyramides qui auront m et m' pour sommets. De sorte que la somme des produits de chaque face par les différences des perpendiculaires abaissées des points m et m' sur chacune d'elles, sera nulle, quelle que soit la position de ces points m et m' dans l'intérieur du polyèdre. Si par le point m' on fait passer autant de polygones qu'il y a de faces, lesquels soient égaux et parallèles chacun à chacune de ces faces, l'égalité précédente deviendra la somme des produits des mêmes faces par les perpendiculaires abaissées du point m sur ces faces, en prenant négativement celles de ces perpendiculaires qui tombent sur le revers des faces.

Corollaire I. Si le point m est le centre de la sphère inscrite à une pyramide triangulaire, et que m' soit le sommet de l'angle opposé à la base, en désignant cette base et les

autres faces de la pyramide par f, f', f'', f''', la hauteur de la pyramide par h, et par p le rayon ou la perpendiculaire abaissée de m sur chaque face, on aura

$$(p-h)f+p\times f'+p\times f''+p\times f'''=0;$$

d'où

$$\frac{p(f+f'+f''+f''')}{3}=\frac{hf}{3}:$$

si l'on note par P le volume de la pyramide, et par A la somme des quatre triangles qui composent la surface, on aura

$$\frac{pA}{3}=P, \quad \text{d'où} \quad p=\frac{3P}{A},$$

expression du rayon de la sphère inscrite donnée (Géom., Prob. VII, Note V).

Corollaire II. Si toutes les faces de la pyramide sont égales; le point m ayant une position quelconque dans l'intérieur du tétraèdre, et le point m' étant toujours au sommet de l'angle opposé à la base, on trouve, en désignant les perpendiculaires par p, p', p'', p''',

$$(p-h)f+p'\times f+p''\times f+p'''\times f=0;$$

d'où

$$h=p+p'+p''+p''';$$

c'est-à-dire que *la hauteur d'un tétraèdre dont toutes les faces sont égales, est égale à la somme des perpendiculaires menées d'un point quelconque pris au-dedans du tétraèdre, sur toutes ces faces.*

La propriété analogue se retrouve dans le triangle équilatéral, en prenant le point m quelconque dans le triangle, et l'un des sommets pour le point m' (Réc. de Théo. et Prob., Théo. V).

Théorème LX. *Les surfaces totales du cône équilaté-*

ral (*) et du cylindre circonscrits (**) à une sphère, sont en proportion continue avec la surface de cette sphère.

Fig. 226. En effet, désignons respectivement par S, S′, S″ les surfaces totales de chacun de ces trois corps. Il faut démontrer que $S : S' :: S' : S''$. Or (Géom., Liv. VIII, Prop. VII) la surface convexe du cône SAB, étant circ $CA \times \frac{1}{2} SA$, la surface totale sera

$$S = \text{circ } CA \times \tfrac{1}{2} SA + \text{circ } CA \times \tfrac{1}{2} CA.$$

Désignant par R le rayon OC, et nommant Q sa circonférence, on aura

$$\text{circ } CA : Q :: CA : R;$$

d'où

$$\text{circ } CA = \frac{Q \times CA}{R} = Q\sqrt{3};$$

en observant que le côté du triangle équilatéral circonscrit, est $2R\sqrt{3}$ (Réc. de Théor. et Prob., Théor. XXVIII); il viendra donc

$$S = Q\sqrt{3} \times R\sqrt{3} + Q\sqrt{3} \times \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{9RQ}{2}.$$

(*) On appelle *cône équilatéral* celui dont le triangle générateur est la moitié d'un triangle équilatéral ayant pour côté le diamètre de la base.

(**) On a vu dans les *Élémens*, comment on circonscrit un cylindre à une sphère; mais on n'y a pas trouvé la manière de circonscrire le cône. Fig. 226. Soit SAB un triangle équilatéral ; soit O le centre du cercle inscrit : si l'on imagine que le triangle SAC et le demi-cercle DEC tournent simultanément autour de SC, le demi-cercle DEC décrira une sphère inscrite au cône décrit par le triangle SAC. De sorte que la surface sphérique et la surface conique se toucheront suivant une circonférence de cercle. On remarquera aussi que la sphère n'aura que le point C de commun avec la base du cône. Ce que nous venons de dire suffit pour que le lecteur conçoive l'inscription d'un cône à la sphère.

En second lieu, la surface totale du cylindre circonscrit est évidemment $3RQ$; on a donc $S' = 3RQ$; la surface convexe de la sphère $S'' = 2RQ$: il faut donc qu'on ait

$$\frac{9RQ}{2} : 3RQ :: 3RQ : 2RQ ;$$

ce qui a lieu en effet, puisque cette proportion se réduit à celle-ci

$$9 : 6 :: 6 : 4 ,$$

dans laquelle le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Donc, etc.

Théorème LXI. *Les surfaces totales du cône équilatéral et du cylindre équilatère inscrits à une sphère, sont en proportion continue avec la surface de la sphère circonscrite.*

On peut supposer un triangle équilatéral et un quarré inscrits dans un cercle, et ces trois surfaces tournant autour d'un des diamètres du cercle, pris de telle manière qu'il en résulte les surfaces énoncées. Or le côté du triangle équilatéral inscrit au cercle, étant $R\sqrt{3}$, on aura pour la circonférence qui sert de base au cône équilatéral, $\frac{1}{2}Q\sqrt{3}$; Q étant la circonférence d'un grand cercle de la sphère : ensorte que la surface totale du cône sera

$$S = \frac{3}{4}Q \cdot R + \frac{3RQ}{8} = \frac{9RQ}{8} ;$$

la surface de la sphère est

$$S'' = 2QR.$$

Quant à la surface totale du cylindre inscrit, on observera que son côté étant $R\sqrt{2}$ (Géom., Liv. IV, Prop. III, Schol.), le cercle qui lui sert de base est $\frac{QR\sqrt{2}}{4}$; donc on a pour sa surface

$$\frac{RQ\sqrt{2}}{2} + RQ\sqrt{2} = \frac{3RQ\sqrt{2}}{2} ;$$

or

$$Q' : Q :: \frac{R\sqrt{2}}{2} : R, \text{ d'où } Q' = \frac{Q\sqrt{2}}{2}, \text{ et } S' = \frac{3RQ}{2};$$

et conséquemment

$$S = \frac{9RQ}{8}, \quad S' = \frac{3RQ}{2}, \quad S'' = 2RQ,$$

d'où résulte la proportion

$$\frac{9RQ}{8} : \frac{3RQ}{2} :: \frac{3RQ}{2} : 2RQ,$$

qui revient à celle-ci

$$9 : 12 :: 3 : 4,$$

et de laquelle on conclut que les surfaces S, S', S'' sont en proportion continue. Donc, etc.

Théorème LXII. *Les volumes du cône équilatéral et du cylindre circonscrits à une sphère, sont en proportion continue avec le volume de la sphère.*

Fig. 226. Soient S, S', S'' les volumes de ces trois corps : il s'agit de prouver que

$$S : S' :: S' : S''.$$

En effet

$$S = \text{circ CA} \cdot \tfrac{1}{2}\text{CA} \times \tfrac{1}{3}\text{SC} = \text{circ CA} \times \tfrac{1}{2}\text{CA} \times R,$$

en observant qu'il a été démontré (Réc. de Théor. et Prob., Théor. V) que la hauteur d'un triangle équilatéral est égal à trois fois le rayon du cercle inscrit, or

$$\text{circ CA} : Q :: \text{CA} : R, \text{ d'où circ CA} = \frac{Q \times \text{CA}}{R} = Q\sqrt{3};$$

donc $S = \frac{3QR^2}{2}$. Le volume du cylindre est $S' = R^2Q$, et celui

de la sphère est $S'' = \frac{2QR^2}{3}$. Ensorte que

$$\frac{3QR^2}{2} : R^2Q :: R^2Q : \frac{2QR^2}{3};$$

et en effet, cette proportion revient à celle-ci :

$$\tfrac{3}{2} : 1 :: 1 : \tfrac{2}{3},$$

qui est continue. Donc, etc.

Théorème LXIII. *Le cône, la sphère et le cylindre de même hauteur ont leurs volumes comme* 1 : 2 : 3, *le cône et le cylindre ayant d'ailleurs pour base un grand cercle de la sphère.*

En effet le volume du cône est $\frac{1}{2}RQ \times \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}QR^2$; le volume de la sphère est $2RQ \times \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}QR^2$; et enfin le volume du cylindre est $\frac{1}{2}RQ \times 2R = QR^2$. Or on a Fig. 22.

$$\frac{QR^2}{3} : \frac{2QR^2}{3} : QR^2 :: 1 : 2 : 3.$$

Donc, etc.

Du contact des sphères.

Problème LXXXVII. *Mener un plan tangent à trois sphères données.*

Un plan tangent à une sphère, est un plan qui n'a qu'un point commun avec cette sphère. Le rayon en ce point de la sphère, est perpendiculaire au plan tangent (Géom., Liv. VII, Prop. VII).

En un point donné sur une sphère, on ne peut mener qu'un seul plan tangent.

Par une droite donnée hors d'une sphère, on peut mener deux plans tangens à cette sphère, de même que par un point donné hors d'un cercle, on peut mener deux tangentes à ce cercle.

Considérons deux sphères, et supposons un plan mené par

leurs centres; ce plan coupera les deux sphères suivant deux grands cercles : si on leur mène deux tangentes extérieures
Fig. 228. ST, ST′ qui se couperont en S sur la ligne des centres AB, puis deux tangentes alternes *tst″*, *t′st‴*, qui se couperont sur la même ligne en *s*; et qu'on imagine que la figure tourne autour de la ligne des centres, les tangentes extérieures décriront une surface conique ayant son sommet en S, laquelle touchera chacune des sphères suivant une circonférence, et tout plan tangent à cette surface conique, c'est-à-dire, tout plan qui n'aura qu'une arête commune avec cette surface, touchera les deux sphères. Donc il y aura une infinité de plans tangens aux deux sphères. Considérons les deux surfaces coniques opposées au sommet *s* : il est facile de voir que tout plan tangent à ces deux cônes en même temps, le sera encore aux deux sphères; d'où l'on conclura une autre infinité de plans tangens.

Mais trois sphères ne peuvent être touchées en même temps que par huit plans.

En effet, si on conçoit les trois circonférences tournant deux à deux autour des lignes des centres AB, AC, BC avec les tangentes extérieures et alternes, il y aura trois sphères et six cônes engendrés : trois de ces cônes auront leurs sommets
Fig. 228. en S, S′, S″; nous les appellerons *cônes extérieurs* : les trois autres auront leurs sommets en *s*, *s′*, *s″*; nous les appellerons *cônes intérieurs* : les sommets S, S′, S″; S, *s″*, *s′*; S′, *s″*, *s*; S″, *s′*, *s* seront en ligne droite (Réc. de Théor., et Probl., Théorèmes XXV et XXVI). Le plan tangent à deux quelconques de ces six cônes, sera aussi tangent aux trois sphères. Par exemple, le plan tangent aux deux cônes extérieurs dont les sommets sont S et S′, aura une trace horizontale SS′ qui passera par S″; et le plan tangent aux deux cônes dont les sommets sont S″, S′, aura une trace horizontale S″S′ qui passera par S; donc ces deux plans passeront par une même droite, et devront être tangens suivant la

même arête au cône dont le sommet est S' ; ils ne seront donc qu'un seul et même plan tangent aux trois sphères. Or on ne peut mener ce plan que de huit manières différentes.

Pour le prouver, observons que, dans les combinaisons trois à trois des six sommets S, S', S'', s, s', s'', il faut exclure, 1°. celles où entrent S et s, S' et s', S'' et s'', parce que le même plan ne peut toucher à la fois un cône extérieur et le cône intérieur qui lui correspond, ou les cônes extérieur et intérieur tangens aux deux mêmes sphères ; 2°. celles où il entre un des trois sommets s, s', s'' avec deux des trois sommets S, S', S'', parce que le plan qui touche deux quelconques des trois cônes extérieurs, touche nécessairement le troisième, et que, d'après ce qui vient d'être observé, il ne peut toucher en même temps aucun des cônes intérieurs ; 3°. enfin la combinaison s, s', s'', parce que le plan tangent à deux cônes intérieurs, touche nécessairement un des cônes extérieurs, puisque ces trois points sont toujours en ligne droite ; d'où il résulte qu'il ne peut toucher le cône intérieur correspondant. Donc les combinaisons des sommets pris trois à trois se réduisent aux quatre suivantes : S, S', S'' ; S, s', s'' ; S', s, s'' ; S'', s, s' : or par l'une des quatre droites que ces combinaisons déterminent, on ne peut faire passer que deux plans tangens aux cônes circonscrits ; donc par les quatre droites, on ne peut mener que huit plans tangens aux sphères données.

Maintenant, pour résoudre le problème proposé, on déterminera les sommets des cônes circonscrits, tant intérieurs qu'extérieurs, et par chacune des quatre droites $SS'S''$, $Ss's''$, $S'ss''$ $S''ss'$, on mènera deux plans tangens à l'une quelconque des trois sphères données, et ces plans les toucheront toutes trois en même temps.

Problème LXXXVIII. *Trouver de combien de manières on peut placer une sphère d'un rayon donné, pour qu'elle*

touche trois autres sphères dont les centres et les rayons sont donnés.

Soient a, b, c les rayons des sphères données A, B, C, et t le rayon de la sphère tangente. Lorsque deux sphères se touchent, la distance de leurs centres est, comme pour deux cercles tangens, la somme ou la différence de leurs rayons : ainsi le centre de la sphère qui toucherait A, B et C, est sur l'une des deux sphères a', a'' concentriques à A, et ayant pour rayons, l'une $t+a$, l'autre $t-a$; par la même raison, le même centre est sur l'une des deux sphères b', b'' concentriques à B, et ayant pour rayons, l'une $t+b$, l'autre $t-b$; enfin il est sur l'une des deux sphères concentriques à C et dont les rayons sont $t+c$, $t-c$. D'où il suit que ce point est à l'intersection de trois des six sphères a', a'', b', b'', c', c''. Or en excluant des combinaisons trois à trois de ces six sphères, celles où il entre a' et a'' ; b' et b'' ; c' et c'', parce que des sphères concentriques ne peuvent pas se couper ; ces combinaisons se réduisent aux huit suivantes, $a'b'c'$, $a'b'c''$, $a'b''c'$, $a'b''c''$, $a''b'c'$, $a''b'c''$, $a''b''c'$, $a''b''c''$. De plus, comme trois sphères se coupent en deux points (pag. 197, Prob. LXXVI), les huit systèmes donnent seize points pour le centre de la sphère du rayon t. Donc on peut placer une sphère d'un rayon donné dans seize positions différentes au plus, de manière que, dans chacune, elle touche trois sphères dont les centres et les rayons sont donnés.

Problème LXXXIX. *Une sphère variable de rayon, se meut en touchant constamment trois sphères fixes dont les centres et les rayons sont donnés ; on demande la courbe formée sur chacune des sphères fixes par la suite de ses points de contact avec la sphère mobile.*

Soient, comme précédemment, A, B, C les sphères fixes, et a, b, c leurs rayons ; T la sphère mobile, et t son rayon. On vient de prouver que la sphère mobile pouvait toucher les trois sphères fixes dans seize positions différentes. Considérons-la

dans une de ses positions, dans celle, par exemple, où les distances des centres des sphères touchées A, B, C et du centre de la sphère touchante sont $a+t$, $b+t$, $c+t$; et supposons que son rayon changeant et devenant t', t'', etc., ces distances deviennent successivement $a+t'$, $b+t'$, $c+t'$, puis $a+t''$, $b+t''$, $c+t''$, etc.; on aura ainsi une suite de sphères T, T', T'', etc. des rayons t, t', t'', etc. qui toucheront les sphères fixes A, B, C, chacune en une suite de points; et il s'agit de trouver la nature de la courbe formée par la suite des points de contact sur chacune des sphères fixes.

A cet effet, nous établirons d'abord les deux lemmes suivans :

Lemme I[er]. *Les plans menés par les trois points de contact de chacune des sphères T, T', T'', etc., tangentes aux sphères fixes A, B, C, concourent en une seule et même droite située dans le plan qui passe par les centres des trois sphères fixes.*

Lemme II. *Les six points de contact de deux quelconques des sphères T, T', T'', etc. avec les trois sphères fixes, peuvent être placés sur une même surface sphérique, quoiqu'en général quatre points déterminent le centre et le rayon d'une sphère.*

Pour suivre les démonstrations de ces deux propositions, il faudra se rappeler les propriétés du cercle, démontrées (Réc. de Théor. et Prob., Théor. XXII).

1°. Désignons par AT, BT, CT les points de contact de la sphère T avec les sphères A, B et C, par AT', BT', CT' les points de contacts de la sphère T' avec A, B, C; par AT'', BT'', CT'' ceux de la sphère T'' avec A, B, C, etc. Il s'agit donc de prouver que les plans déterminés par les points AT, BT, CT, ou AT', BT', CT', ou AT'', BT'', CT'', etc. passent par une seule et même droite située dans le plan des centres des trois sphères A, B, C, centres que nous désignerons par α, β, γ.

Le plan de α, β et du centre de la sphère T passant par

les points de contact AT, BT, et coupant en même temps les sphères A, B et T suivant trois grands cercles tangens en ces points, et le plan des centres α, β, γ suivant une ligne $\alpha\beta$, la droite AT, BT rencontre la droite $\alpha\beta$ en un point. Par la même raison, la droite AT, CT coupe $\alpha\gamma$ en un point; et la droite CT, BT coupe la droite $\gamma\beta$ en un point. Ces trois points se trouvent sur le plan des centres α, β, γ, et sur le plan des trois points de contact AT, CT, CT; donc ils sont sur une seule et même ligne droite. Or cette droite est aussi indépendante de la sphère tangente T que le point R (Réc. de Théor. et Prob., Théor. XXII) est indépendant du cercle tangent dont le centre est C″, parce qu'en passant des points de contact AT, BT, aux points de contact AT′, BT′, la distance des centres $\alpha\beta$ et les rayons restent les mêmes et parallèles entre eux. D'où il suit que le point de rencontre de AT et BT avec $\alpha\beta$, est déterminé de la même manière que le point de rencontre de AT′ et BT′ avec $\alpha\beta$. Donc quelle que soit la position de la sphère tangente aux trois sphères A, B, C, le plan des trois points de contact passe par une droite unique située dans le plan des trois centres α, β, γ, droite que nous désignerons par L.

Passons à la deuxième proposition.

T et T′ étant deux sphères quelconques tangentes aux trois sphères fixes A, B, C, il faut prouver que les six points de contact AT, BT, CT; AT′, BT′, CT′ peuvent être placés sur une même sphère. On remarquera d'abord que quatre de ces six points étant pris dans l'ordre suivant, AT, BT, AT′, BT′; BT, CT, BT′, CT′; CT, AT, CT′, AT′ sont toujours placés sur une même circonférence de cercle; car les droites AT, BT, AT′, BT′ concourent en un même point de la droite $\alpha\beta$, puisqu'elles sont dans deux plans qui passent par la ligne des centres α et β; donc elles sont dans un même plan. Or les cercles intersections des sphères A et B par ce dernier plan, sont tels que la droite qui joint leurs centres, concourt au point de la droite $\alpha\beta$, où se coupent les droites AT, BT;

AT′, BT′; ce dont il est facile de se rendre raison, en observant que ces cercles sont touchés en AT et BT par la circonférence intersection de la sphère T par ce plan, et en AT′ et BT′ par la circonférence intersection de la sphère T′ par le même plan; et qu'ainsi les points AT, BT sont les analogues des points t et t' (n° cité), et qu'il en est de même des points AT′, BT′. Donc les quatre points AT, BT; AT′, BT′ sont placés de la même manière que les quatre points m', m, n, n' (n° cité) : donc ils sont, comme ceux-ci, sur une même circonférence. On dira la même chose des autres combinaisons BT, CT, BT′, CT′; CT, AT, CT′, AT′. Mais une sphère menée par quatre points pris sur l'une de ces circonférences, ce qui n'équivaut qu'à trois points, et par un cinquième pris sur un autre, passera nécessairement par le sixième point : car soient ces cinq points AT, BT, AT′, BT′ et CT; la sphère passera par la première circonférence, par trois points de la seconde, et par trois points de la troisième. Donc les six points de contact peuvent appartenir à une même surface sphérique que nous désignerons par S.

Nous pouvons déduire de ces deux propositions, la solution du problème proposé.

La sphère S coupe les trois sphères T, T′ et A, la première suivant un cercle qui passe par les trois points AT, BT, CT; la seconde suivant un cercle AT′, BT′, CT′, et la troisième suivant un cercle qui passe par AT et AT′, et ce dernier cercle est tangent aux deux autres en AT et AT′, puisque la sphère A est touchée par les sphères T et T′; on observera de plus que les cercles AT, BT, CT; AT′, BT′, CT′ sont dans deux plans différens qui passent par la droite L, et que le cercle qui leur est tangent est dans un plan transversal : donc les tangentes communes à ces cercles et au cercle d'intersection des deux sphères S et A, sont dans les plans AT, BT, CT; AT′, BT′, CT′; mais on a démontré que ces plans passent par une même droite L située dans le plan des centres α, β, γ; donc les deux tangentes en question passent par la

droite L; mais elles sont aussi dans le plan du cercle d'intersection des deux sphères S et A; donc elles passent par le point d'intersection de ce plan et de la droite L; or ce point ne varie pas lorsque la sphère T' varie et devient T'', T''', etc.; car le cercle des sphères S et A touche toujours dans le même point le cercle AT, BT, CT, et il devient tangent au cercle AT'', BT'', CT''; puis au cercle AT''', BT''', CT''', etc.; dans toutes ces positions du cercle transversal continuellement tangent au même cercle AT, BT, CT, et aux cercles AT', BT', CT'; AT'', BT'', CT'', etc., les tangentes communes qui sont les intersections du plan du cercle transversal et des plans des deux cercles auxquels il reste tangent, doivent se couper sur la droite L au point où cette droite est rencontrée par la tangente commune et fixe au contact du cercle AT, BT, CT avec les cercles transversaux. Donc les tangentes aux cercles d'intersection AT et AT', AT et AT'', etc. des sphères S et A forment une surface conique droite circonscrite à la sphère A; et la base de ce cône droit est le lieu des points de contact AT, AT', AT'', etc.: donc ce point appartient à un cercle tracé sur la sphère A dont le plan est perpendiculaire à celui des trois centres α, β, γ.

Problème LXXXX. *Trouver la courbe parcourue par le centre d'une sphère mobile, assujétie à toucher constamment trois sphères fixes.*

Le lieu des centres de la sphère mobile est sur un des cônes droits qui ont pour sommet le centre d'une sphère fixe, et pour base la courbe formée par les points de contact de cette sphère fixe avec la sphère mobile, courbe qui est un cercle, parce que, dans toutes les positions de la sphère mobile T, qui touche continuellement la sphère A, les centres de ces deux sphères et le point de contact sont dans une ligne droite qui est une arête de cette surface conique: de plus, le lieu des mêmes centres est un plan perpendiculaire à la droite L qui passe par les sommets des cônes circonscrits extérieurement

aux sphères données. En effet, tout plan passant par cette droite, coupe les trois sphères fixes et la sphère mobile suivant quatre cercles dont le quatrième est tangent aux trois premiers. Si par les centres de deux quelconques de ces quatrièmes cercles, on élève des perpendiculaires aux plans de ces cercles, ces perpendiculaires se rencontreront, et elles seront dans un plan perpendiculaire à la droite L : car, d'après le Lemme II, les six points de contact entre deux sphères T et T' et les trois sphères fixes, sont toujours sur une même sphère S qui passe conséquemment par les circonférences de deux des quatrièmes cercles : donc les deux perpendiculaires en question iront se couper au centre de la sphère correspondante S, et parce que le plan de ces deux perpendiculaires l'est en même temps aux deux plans sécans menés par L, il le sera à la droite L. Si l'on considère six autres points de contact entre T', T'' et les trois sphères fixes, lesquels seront sur une autre sphère S', on démontrera de la même manière, que les perpendiculaires élevées par les centres des cercles correspondans aux plans de ces cercles, se couperont au centre de la sphère S', et que leur plan sera encore perpendiculaire à la droite L, et comme les plans menés par les deux premières perpendiculaires, puis par les deux secondes, se coupent suivant une de ces perpendiculaires, et que de plus ils sont perpendiculaires à la même droite L, il en résulte que ces trois perpendiculaires sont dans un même plan, conclusion qui s'étend à toutes les autres. Donc ces perpendiculaires dont aucune ne peut passer en même temps par les centres de deux des sphères S, S', S'', etc., seront les tangentes de la courbe parcourue par le centre de la sphère mobile ; donc cette courbe est plane, et son plan est perpendiculaire à la droite qui passe par les sommets des cônes circonscrits extérieurement aux sphères données.

Remarque.

Dans le n° 2 de *la Correspondance sur l'École Polytech-*

nique, d'où j'ai tiré, à quelques développemens près; ce qu'on vient de lire sur le contact des sphères, on trouve encore, sous le même titre, la solution des problèmes suivans, qui n'a pu trouver place ici.

1°. *Déterminer les lignes de courbure de la surface courbe, enveloppe de l'espace parcouru par une sphère qui se meut en touchant constamment trois sphères fixes.*

2°. *De quelques propriétés de la courbe parcourue par le centre d'une sphère mobile qui touche constamment trois sphères fixes.*

3°. *Trouver parmi les sphères tangentes à trois sphères données, celle qui a son centre dans le même plan que celui des sphères touchées.*

Question de laquelle dépend celle de ce problème : *Mener un cercle tangent à trois cercles donnés*, en considérant les cercles donnés comme les grands cercles de trois sphères.

4°. *Mener une sphère tangente à quatre sphères données.*

Nous observerons que trois cercles donnés dans un plan, peuvent être touchés par un quatrième cercle, de huit manières différentes ; et que quatre sphères peuvent être touchées par une cinquième de trente-deux manières différentes.

Sur la Trigonométrie rectiligne.

On trouve (Trig. de *Legendre*, Noti., Génér.), et en désignant le rayon par R, ces valeurs des lignes trigonométriques au moyen du sinus et du cosinus, savoir :

$$\text{tang} = R \cdot \frac{\sin}{\cos}, \quad \cot = R \cdot \frac{\cos}{\sin}, \quad \text{séc} = R^2 \frac{1}{\cos},$$

$$\text{coséc} = R^2 \cdot \frac{1}{\sin}, \ \sin \text{vers} = R - \cos, \ \cos \text{vers} = R - \sin.$$

D'après ces expressions, il est facile de former deux tableaux dont le second offre les valeurs de toutes les lignes trigonométriques pour les quatre points remarquables 0°, 100°, 200° et 300°, et le premier les signes de toutes ces lignes dans les quatre quadrans de 0° à 100°, de 100° à 200°, de 200° à 300°, et de 300° à 400°.

Il est bien entendu que le sinus est positif de 0 à 200°, et négatif de 200° à 400° ou à 0°; que le cosinus est positif pour les arcs de 0° à 100° et de 0° à 300°, et négatif pour les arcs de 100 à 200° et de 200° à 300°.

De	sin.	cos.	tang.	cot.	séc.	coséc.	sin v.	cos v.
0 à 100	+	+	+	+	+	+	+	+
100 à 200	+	—	—	—	—	+	+	+
200 à 300	—	—	+	+	—	—	+	+
300 à 400	—	+	—	—	+	—	+	+
Pour 0	0	R	0	∞	R	∞	0	R
100	R	0	∞	0	∞	R	R	0
200	0	— R	0	∞	— R	∞	2R	R
300	— R	0	∞	0	∞	— R	R	2R

Le second tableau montre que le sinus et le cosinus ne varient que de zéro à R ; que la tangente et la cotangente varient de zéro à l'infini ; que la sécante et la cosécante varient de R à l'infini, et que les sinus et cosinus verses varient de zéro à 2R.

Etant données trois des six choses, savoir : les trois côtés et les trois angles, la Trigonométrie a pour objet de faire découvrir les trois autres. Il n'y a donc qu'à former entre les trois données et les trois inconnues, trois équations, et déduire de ces équations celles des inconnues qu'on veut avoir, en éliminant les deux autres.

Pour obtenir ces trois équations, nous partirons de quelques propriétés connues du triangle, par exemple, de celle-ci : que *chacun des côtés est égal à la somme de chacun des deux autres côtés, multiplié par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.*

Soit, en effet, un triangle ABC dont les angles soient A, B et C, et les côtés opposés a, b, c : en abaissant de chacun des angles une perpendiculaire sur le côté opposé, on aura, en supposant le rayon égal à l'unité,

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \text{(M)}.$$

Supposons que connaissant les trois côtés, on veuille trouver l'angle A : pour cela, on multipliera la première des trois équations par a, la seconde par b et la troisième par c, et on retranchera le premier produit de la somme des deux autres, ce qui donnera

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos A,$$

d'où on déduit

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

formule connue.

Si l'on veut avoir sin A, on remplacera dans cette dernière relation cos A par $\sqrt{1-\sin^2 A}$, et, après les réductions, on trouvera

$$\sin A = \frac{1}{2bc} \cdot \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Si, pour abréger, on représente le radical par k, on aura

de même
$$\left.\begin{array}{l} \sin A = \frac{k}{2bc} \\ \sin B = \frac{k}{2ac} \\ \sin C = \frac{k}{2ab} \end{array}\right\} (N)$$

en observant que k se compose d'une manière symétrique des trois côtés a, b et c.

En divisant la première des équations (N) par la seconde, et la seconde par la troisième, on trouve

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c},$$

d'où résulte

$$\sin A : \sin B :: \sin C :: a : b : c;$$

ce qui est le principe connu de la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés.

Si dans la première des équations (M), savoir,

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

on substitue ces valeurs

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A}, \quad c = a \cdot \frac{\sin C}{\sin A};$$

tirées de (N), il viendra

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

Mais comme l'angle A est le supplément de B + C, on aura

$$\sin A = \sin(B + C),$$

donc

$$\sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B \ldots\ldots (O),$$

théorème fondamental dans la Trigonométrie. Lorsque l'arc C est négatif, sin C devient négatif et cos C ne change pas de signe ; donc

$$\sin(B - C) = \sin B \cos C - \sin C \cos B \ldots\ldots (P).$$

Soient C′ le complément de C, et $\frac{\pi}{2}$ le quart de la circonférence : on aura

$$C' = \frac{\pi}{2} - C, \quad \sin C' = \cos C, \quad \cos C' = \sin C;$$

or

$$\sin(B - C') = \sin B \cos C' - \sin C' \cos B;$$

donc, par la substitution des valeurs précédentes de sin C′ et cos C′,

$$\sin(B - C') = \sin B \sin C - \cos C \cos B,$$

et, à cause de

$$\sin(B - C') = \sin\left(B - \frac{\pi}{2} + C\right) = \sin\left(B + C - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - (B + C)\right) = -\cos(B + C),$$

il viendra, après la substitution et le changement des signes,

$$\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C \ldots\ldots (Q);$$

Cette relation, en y faisant l'arc C négatif, donnera celle-ci

$$\cos(B - C) = \cos B \cos C + \sin B \sin C \ldots\ldots (R).$$

C'est sur ces quatre formules (O), (P), (Q), (R) qu'est

établie, comme on le sait, toute la théorie des quantités angulaires.

Des formules (O) et (Q), on déduit

$$\frac{\sin(B+C)}{\cos(B+C)} = \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos B \cos C - \sin B \sin C};$$

divisant haut et bas par le produit cos B cos C et observant que $\frac{\sin}{\cos} = tang$, on trouvera

$$\frac{\sin(B+C)}{\cos(B+C)} = \operatorname{tang}(B+C) = \frac{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{1 - \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C}.$$

Soit $A + B + C = \pi$, π étant la demi-circonférence, alors

$$\operatorname{tang} A = -\operatorname{tang}(B+C)$$

$$= -\frac{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{1 - \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C} = \frac{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C - 1},$$

égalité qui donne ce résultat curieux

$$\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \ldots (S),$$

et duquel on conclut qu'il existe une infinité de systèmes de trois nombres dont la somme est égale au produit, puisque la relation précédente a lieu pour $A + B + C = \pi, = 3\pi, = 5\pi$; etc.

Si on ne connaît que les trois angles d'un triangle, on ne peut déterminer que les rapports entre les côtés.

Soient c, c', c'' les côtés d'un triangle, et C, C', C'' les angles opposés à ces côtés : on a ces formules (pag. 248)

$$\cos C = \frac{c''^2 + c'^2 - c^2}{2c''c'}, \quad \cos C' = \frac{c''^2 + c^2 - c'^2}{2c''c};$$

$$\cos C'' = \frac{c'^2 + c^2 - c''^2}{2c'c};$$

on déduit de la troisième

$$c''^2 = c^2 + c'^2 - 2cc' \cos C'' \ldots\ldots (a),$$

de la seconde

$$c'^2 = c^2 + c''^2 - 2cc'' \cos C' \ldots\ldots (b),$$

et de la première

$$c^2 = c'^2 + c''^2 - 2c'c'' \cos C \ldots\ldots (c).$$

De ces trois équations, on en conclura trois autres du premier degré, en ajoutant la première à la seconde, la première à la troisième, et la seconde à la troisième; puis divisant la première somme par $2c$, la seconde par $2c'$, et la troisième par $2c''$. Ces équations sont les suivantes :

$$c - c' \cos C'' - c'' \cos C' = 0, \quad c' - c \cos C'' - c'' \cos C = 0,$$
$$c'' - c \cos C' - c' \cos C = 0.$$

Qu'on pose $\frac{c'}{c} = p$, $\frac{c''}{c} = q$, on pourra déterminer, au moyen de deux de ces équations, les rapports p et q entre les côtés. La substitution faite de ces valeurs dans la troisième, ou dans celle qu'on n'aura pas employée, donnera cette équation de rélation entre les cosinus des trois angles

$$1 - \cos^2 C'' - \cos^2 C' - \cos^2 C - 2 \cos C'' \cos C' \cos C = 0.$$

Si l'on fait passer $2 \cos C'' \cos C' \cos C$ dans le second membre, et qu'on ajoute de part et d'autre $\cos^2 C \cos^2 C''$, on aura cette équation

$$1 - \cos^2 C'' - \cos^2 C + \cos^2 C'' \cos^2 C = (\cos C' + \cos C \cos C'')^2,$$

qu'on transforme dans la suivante

$$\sin^2 C'' - 1 + \sin^2 C + (1 - \sin^2 C'')(1 - \sin^2 C)$$
$$= (\cos C' + \cos C \cos C'')^2;$$

effectuant les opérations et les réductions, on parvient à

$$-\cos C' = \cos C \cos C'' - \sin C \sin C'' = \cos(C + C''),$$

relation qui a effectivement lieu, puisqu'on a dans tout triangle

$$C + C' + C'' = 200^\circ.$$

De ces trois relations démontrées

$$\sin(B - C) = \sin B \cos C - \sin C \cos B$$
$$\sin(C - A) = \sin C \cos A - \sin A \cos C$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A,$$

on déduit, après avoir multiplié la première par sin A, la seconde par sin B, et la troisième par sin C et ajouté les produits

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0 \quad (T),$$

on trouverait de même

$$\cos A \sin(B - C) + \cos B \sin(C - A) + \cos C \sin(A - B) = 0 \quad (U).$$

Ces propriétés ayant lieu pour trois angles quelconques, conviennent également aux trois angles d'un triangle.

Si l'on multiplie, l'une par l'autre, les relations (O) et (P) et, qu'on réduise, on trouvera

$$\sin(B + C) \times \sin(B - C) = \sin^2 B - \sin^2 C$$
$$= (\sin B + \sin C)(\sin B - \sin C),$$

les relations (Q) et (R) donneront

$$\cos(B + C) \times \cos(B - C) = \cos^2 B - \sin^2 C$$
$$= (\cos B + \sin C)(\cos B - \sin C);$$

on a donc ces deux propriétés

$$\sin(B+C) : \sin B + \sin C :: \sin B - \sin C : \sin(B - C) \ldots (V)$$
$$\cos(B+C) : \cos B + \sin C :: \cos B - \sin C : \cos(B - C) \ldots (X).$$

Soit une série d'angles $a, b, c \ldots\ldots p$: on a, d'après ce qui précède,

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b$$
$$\sin(b+c)\sin(b-c) = \sin^2 b - \sin^2 c$$
$$\sin(c+d)\sin(c-d) = \sin^2 c - \sin^2 d$$
$$\vdots$$
$$\sin(p+a)\sin(p-a) = \sin^2 p - \sin^2 a\,;$$

ajoutant toutes ces équations, il reste, après les réductions, la somme des premiers membres, égale à zéro, c'est-à-dire,

$$\sin(a+b)\sin(a-b) + \sin(b+c)\sin(b-c) + \text{etc.} = 0.$$

Supposons que les angles $a, b, c \ldots p$ forment une progression par équi-différences, dont le premier terme $a = 0$, la différence constante $= m$, et le dernier terme $p = 2\pi$: nous aurons

$$b - a = m, \quad c - b = m, \quad d - c = m, \text{ etc.}$$

d'où

$$a + b = a + b = m, \quad b + c = 3m, \quad c + d = 5m, \text{etc.}$$

et conséquemment, après la substitution dans la propriété précédente, et la division par le facteur commun — sin,

$$\sin m + \sin 3m + \sin 5m + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (\text{Y}),$$

on trouverait aussi

$$\cos m + \cos 3m + \cos 5m + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (\text{Z}.).$$

Soit k un autre angle quelconque : on aura

$$\sin(k + m) = \sin k \cos m + \sin m \cos k$$
$$\sin(k + 3m) = \sin k \cos 3m + \sin 3m \cos k,$$
$$\text{etc.}$$

Ajoutant et observant que la somme des coëfficiens tant de

$\sin k$ que de $\cos k$, est nulle d'après les formules (Y) et (Z), on aura

$$\sin(k+m)+\sin(k+3m)+\sin(k+5m)+\text{etc.}=0,$$

et de même

$$\cos(k+m)+\cos(k+3m)+\cos(k+5m)+\text{etc.}=0.$$

Si l'on fait $k+m=q$, puis $2m=r$, ces propriétés se changeront dans les suivantes

$$\sin q+\sin(q+r)+\sin(q+2r)+\text{etc.}=0$$
$$\cos q+\cos(q+r)+\cos(q+2r)+\text{etc.}=0,$$

et enfin, sous les hypothèses $q=f+g$, $r=g$, elles deviendront

$$\sin(f+g)+\sin(f+2g)+\sin(f+3g)+\text{etc.}=0\ldots(Y')$$
$$\cos(f+g)+\cos(f+2g)+\cos(f+3g)+\text{etc.}=0\ldots(Z').$$

Problème LXXXXI. *Si dans une circonférence ABCD, etc. dont le rayon est R, on inscrit un polygone régulier d'un nombre* n *de côtés; si on décrit une autre circonférence concentrique d'un rayon* $r<R$, *et qu'on prenne sur cette circonférence un point K à volonté, la somme des quarrés des distances de ce point à chacun des angles du polygone régulier, sera* $n(R^2+r^2)$, *c'est-à-dire, constante, quelle que soit la position du point K.*

Par O, centre des circonférences, et par K, menons une droite indéfinie et des droites OA, OB, OC, etc. à tous les sommets des angles du polygone régulier : nous aurons (pag. 248) Fig. 229.

$$\overline{AK}^2=\overline{OA}^2+\overline{OK}^2-2OA\,.\,OK\,.\cos AOK$$
$$\overline{BK}^2=\overline{OB}^2+\overline{OK}^2-2OB\,.\,OK\,.\cos BOK$$
$$\overline{CK}^2=\text{etc.};$$

ajoutant, il viendra

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 + \text{etc.}$$

$$= nR^2 + nr^2 - 2Rr\,(\cos AOK + \cos BOK + \text{etc.}).$$

Or en faisant l'angle au centre du polygone régulier $= g$, et l'angle $FOK = f$, on aura

$$(\cos AOK + \cos BOK + \text{etc.})$$
$$= \cos(f+g) + \cos(f+2g) + \text{etc.} = 0;$$

donc

$$\overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 + \overline{CK}^2 + \text{etc.} = nR^2 + nr^2 = n\,(R^2 + r^2).$$

230. La proposition suivante, démontrée (*Géom.*, Liv. VIII, Prob. XXXIII), renferme encore toute la théorie des quantités angulaires.

Dans tout quadrilatère inscrit au cercle, le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

On a donc

$$BC \,.\, AD = AB \,.\, DC + AC \,.\, BD.$$

Or soient

$$\text{arc } AB = 2a, \quad \text{arc } AC = 2b, \quad \text{arc } CD = 2c,$$
$$\text{arc } DB = 2[2\pi - (a+b+c)],$$

π désignant le quart de la circonférence dans le cercle dont le diamètre est $= 1$, et qui est celui qu'on considère : on a (pag. 150, Lem. I[er]).

$$AB = \sin a, \quad AC = \sin b, \quad CD = \sin c$$
$$DB = \sin(a+b+c), \quad BC = \sin(a+b), \quad AD = \sin(b+c);$$

substituant ces valeurs dans la relation précédente, on trouve

$$\sin(a+b) \times \sin(b+c) = \sin a \,.\, \sin c + \sin b \,.\, \sin(a+b+c),$$

ormule qui aura lieu, quelles que soient les valeurs des angles a, b et c.

Supposons, par exemple, $b+c=\pi$: on aura donc

$$\sin(b+c)=1,\quad \sin c=\cos b,$$
$$\sin(a+b+c)=\sin(\pi+a)=\cos a;$$

donc la formule précédente deviendra

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a.$$

Supposons $b=\pi$; nous aurons

$$\sin b=1,\quad \sin(a+b)=\cos a,\quad \sin(b+c)=\cos c,$$
$$\sin(a+b+c)=\cos(a+c);$$

donc la même formule deviendra

$$\cos(a+c)=\cos a\cos c-\sin a\sin c.$$

De ces deux formules on déduit, en changeant c en $-c$,

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$
$$\cos(a-c)=\cos a\cos c+\sin a\sin c.$$

Supposons $c=-a$, nous aurons

$$\sin c=-\sin a,\quad \sin(b+c)=\sin(b-a),$$
$$\sin(a+b+c)=\sin b;$$

donc la même formule deviendra

$$\sin(b+a)\times\sin(b-a)=\sin^2 b-\sin^2 a.$$

Soit $c=\pi-a$, d'où

$$\sin c=\cos a,\quad \sin(b+c)=\cos(a-b),$$
$$\sin(a+b+c)=\cos b,$$

et

$$\sin(a+b)\times\cos(a-b)=\sin a\,.\cos a+\sin b\,.\cos b.$$

Problème LXXXXII. *Tracer une figure qui représente les principaux rapports existans entre les sinus et cosinus de deux angles proposés, les sinus et cosinus tant de leur somme que de leur différence.*

Soient m et n les deux angles proposés, supposés chacun, ainsi que leur somme, moindre que la quart de la circonférence. Soit de plus $m > n$ et nommons ϖ l'angle droit.

Traçons à volonté une droite AD; faisons d'un côté de cette droite l'angle $BAD = m$, et de l'autre l'angle $CAD = n$. Par
Fig. 231. un point E pris à volonté sur AD, menons BC qui lui soit perpendiculaire; inscrivons le triangle ABC dans un cercle dont le diamètre sera pris pour unité; menons enfin les deux cordes BD, CD, et prenons $EF = CE$, $EH = DE$. Il s'agit de prouver qu'on aura

$$AB = \cos n\,;\quad AC = \cos m,\quad BD = \sin m,\quad CD = \sin n.$$

$$BC = \sin(m+n) = \sin m \cos n + \sin n \cos m\,;$$

$$AD = \cos(m-n) = \cos m \cos n + \sin m \sin n.$$

$$BF \text{ ou } BE - EC = \sin(m-n) = \sin m \cos n - \sin n \cos m.$$

$$AH \text{ ou } AE - DE = \cos(m+n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n.$$

$$BE = \tfrac{1}{2}\sin(m+n) + \tfrac{1}{2}\sin(m-n) = \sin m \cos n$$

$$CE = \tfrac{1}{2}\sin(m+n) - \tfrac{1}{2}\sin(m-n) = \sin n \cos m$$

$$AE = \tfrac{1}{2}\cos(m-n) + \tfrac{1}{2}\cos(m+n) = \cos m \cos n$$

$$DE = \tfrac{1}{2}\cos(m-n) - \tfrac{1}{2}\cos(m+n) = \sin m \sin n.$$

$$AD \times AH = \cos(m-n)\cos(m+n) = \cos^2 m - \sin^2 n = \cos^2 n - \sin^2 m$$

$$BC \times BF = \sin(m+n)\sin(m-n) = \sin^2 m - \sin^2 n = \cos^2 n - \cos^2 m$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \sin^2 m + \cos^2 m = 1$$

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 1.$$

En effet, le diamètre étant représenté par 1, chacun des angles

qui ont leur sommet à la circonférence, a (pag. 150, lem. I[er]) pour sinus la corde sur laquelle il est appuyé. Donc d'abord

$$BD = \sin m, \quad CD = \sin n.$$

De plus, chacun des angles BEA, CEA étant droit par construction, l'angle ABC est complément de m, et ACB complément de n; ensorte que

$$AB = \cos n, \quad AC = \cos m,$$

et, par la même raison, BAC étant $m + n$, on a

$$BC = \sin (m + n).$$

L'angle ABD=ABC+CBD; or ABC ou son égal ABE$=\pi - m$ et CBD$= n$; donc ABD est $\pi - m + n$ ou le complément de $m - n$; et conséquemment

$$AD = \cos (m - n).$$

Menons la droite AF prolongée jusqu'à la circonférence en G et tirons BG : puisque, par construction, EF = EC, on aura

$$GAD = DAC = n;$$

donc

$$BAG = m - n \quad \text{et} \quad BG = \sin (m - n):$$

or le triangle BGF étant isoscèle, parce que l'angle BFG = AFC = ACB = FGB, on a BF = BG; donc

$$BF = \sin (m - n).$$

On prouvera de même que

$$AH = \cos (m + n).$$

La somme des deux segmens BE + CE = BC = $\sin (m + n)$

et leur différence BE — CE = BE — CF = BF = sin $(m-n)$.
Donc le plus grand segment

$$BE = \tfrac{1}{2}\sin(m+n) + \tfrac{1}{2}\sin(m-n),$$

et le plus petit

$$CE = \tfrac{1}{2}\sin(m+n) - \tfrac{1}{2}\sin(m-n).$$

On trouvera de la même manière que

$$AE = \tfrac{1}{2}\cos(m-n) + \tfrac{1}{2}\cos(m+n$$
$$DE = \tfrac{1}{2}\cos(m-n) - \tfrac{1}{2}\cos(m+n).$$

Puisque BC = BE + CE, BF = BE — CE, on aura

$$BC \times BF = \overline{BE}^2 - \overline{CE}^2;$$

mais le triangle rectangle ABE donne

$$\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2,$$

et le triangle ACE, aussi rectangle, donne

$$\overline{CE}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AE}^2;$$

donc

$$BC \times BF = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \cos^2 n - \cos^2 m = \sin(m+n)\sin(m-n)$$
$$= \sin^2 m - \sin^2 n.$$

On trouvera de même

$$AD \times AH = \cos^2 m - \sin^2 n = \cos(m-n)\cos(m+n)$$
$$= \cos^2 n - \sin^2 m.$$

L'angle AEB est droit, et d'ailleurs il a pour mesure la moitié de la somme des arcs AMB + CD; donc l'arc AMB + CD est la moitié de la circonférence; donc la somme des quarrés

des deux cordes AB, DC est égale au quarré du diamètre; donc

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = \sin^2 n + \cos^2 n = 1$$

et pareillement

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \sin^2 m + \cos^2 m = 1.$$

Puisque le triangle rectangle ABE donne $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$, et le triangle DCE, aussi rectangle, donne $\overline{DC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$, on aura par l'addition

$$\overline{AB}^2 + \overline{DC}^2 = 1 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2.$$

D'un autre côté, le triangle rectangle AEB donne

$$AB \text{ ou } \cos n : BE :: 1 : \sin m;$$

donc

$$BE = \sin m \cos n,$$

et de même on trouvera

$$CE = \sin n \cos m$$
$$AE = \cos m \cos n$$
$$DE = \sin m \sin n.$$

Enfin ajoutant ensemble les deux premières de ces égalités, on a

$$BE + CE = BC = \sin(m + n) = \sin m \cos n + \sin n \cos m,$$

et retranchant la seconde de la première, on trouve

$$BE - CE = BF = \sin(m - n) = \sin m \cos n - \sin n \cos m;$$

si l'on ajoute la troisième à la quatrième, il vient

$$AE + DE = AD = \cos(m - n) = \cos m \cos n + \sin m \sin n,$$

et si l'on retranche au contraire la quatrième de la troisième, on a

$$AE - DE = AH = \cos(m + n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n.$$

Nous retrouvons donc encore de cette manière les formules fondamentales de la Trigonométrie.

Voyez encore, sur ce point, l'ouvrage de M. *Carnot*, ayant pour titre : *De la Corrélation des figures de Géométrie.*

Problème LXXXXIII. *Connaissant trois des cinq parties d'un triangle, construire géométriquement le triangle.*

Comme dans un triangle, le troisième angle est connu lorsqu'on connaît les deux autres, il s'ensuit qu'on n'a réellement à considérer que cinq parties, savoir, deux angles et trois côtés.

On observera que si le triangle à construire est rectangle, la connaissance de deux parties suffit.

Si l'on désigne les angles par A, B, C, et les côtés opposés par a, b, c, *il faudra construire,* 1°. *le triangle* ABC *rectangle en* B, *connaissant,*

1°. a et c, c'est-à-dire, *les deux côtés de l'angle droit;*
2°. b et a............ *l'hypoténuse et un côté de l'angle droit;*
3°. b et A............ *l'hypoténuse et un angle aigu;*
4°. A et c............ *un angle aigu et le côté de l'angle droit, adjacent à cet angle aigu;*
5°. A et a............ *un angle aigu et le côté de l'angle droit opposé à cet angle aigu.*

2°. *Le triangle obliquangle, connaissant,*

1°. A, C, b, c'est-à-dire, *deux angles et le côté compris;*
2°. A, C, c........... *deux angles et le côté opposé à l'un d'eux;*
3°. a, c, A.......... *deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux;*
4°. a, b, C.......... *deux côtés et l'angle compris;*
5°. a, b, c........... *les trois côtés.*

Il ne peut y avoir lieu à difficultés qu'à l'égard de cette question : *Connaissant deux côtés* a, c *et l'angle A opposé à l'un d'eux, construire le triangle.* On mènera deux lignes indéfinies XZ, AY sous l'angle connu YAZ ; on portera c de A en B ; on décrira de B, comme centre, avec le rayon a, un arc ; lorsque cet arc coupera la ligne indéfinie XZ, le triangle sera construit. Mais les grandeurs relatives des données a, c et A offrent des circonstances qu'il importe d'analyser. Fig. 233.

Ier cas. L'angle A est aigu et égal à l'angle BAZ : si du point B on mène sur XZ la perpendiculaire BP, on peut avoir l'une de ces relations :

1°. $a < c$	2°. $a < c$	3°. $a < c$	4°. $a = c$	5°. $a > c$
$a < BP$	$a = BP$	$a > BP$	$a > BP$	$a > BP$.

Sous la première, le triangle est impossible ; sous la seconde, le triangle est rectangle ; sous la troisième, on a les deux triangles ABC, ABC′, et l'angle AC′B a pour supplément l'angle BC′C ou son égal BCA ; sous la quatrième, on a le triangle isoscèle ABC″, et sous la cinquième, on ne peut avoir que le triangle BAC‴, le seul qui contienne l'angle aigu A.

IIe cas. L'angle A est obtus et égal à BAX ; alors l'angle inconnu C est nécessairement aigu, et on doit avoir A > C, et conséquemment le côté a opposé à l'angle connu A, doit être plus grand que le côté c ; autrement le triangle ne pourrait exister. On voit facilement qu'alors le triangle BAQ est le seul possible.

Généralement on peut construire un triangle, lorsqu'on connaît trois relations exprimées d'une manière quelconque entre les angles et les côtés : on en a vu des exemples (Probl. VI, VII......XI de ce Recueil).

Ainsi les Elèves pourront s'exercer à la résolution des questions suivantes :

Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui divise l'angle compris en deux parties égales.

Construire un triangle, connaissant deux côtés et la ligne qui, partant du sommet de l'angle compris par les côtés donnés, divise le troisième côté en parties qui soient :: m : n.

Construire un triangle, connaissant un angle, un des côtés adjacens, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

Construire un triangle, connaissant sa base, la somme S^2 *et la différence* D^2 *des quarrés des deux autres côtés.*

Construire un triangle, connaissant sa base, sa surface et l'angle au sommet.

Construire un triangle, connaissant sa base, l'angle au sommet et le rapport m : n *des deux autres côtés.*

Construire un triangle, connaissant un angle, la somme des côtés qui le comprennent, et la perpendiculaire menée du sommet de l'angle connu sur le côté opposé.

Construire un triangle, connaissant un côté, un des angles adjacens et la perpendiculaire menée du sommet de cet angle sur le côté opposé.

Construire un triangle, connaissant sa surface et deux de ses angles.

Construire un triangle rectangle, connaissant la perpendiculaire menée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, et la différence des côtés de l'angle droit.

Problème LXXXXIV. *Démontrer géométriquement la formule*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

S étant la surface d'un triangle quelconque, a, b, c *ses côtés et* p *la demi-somme de ces côtés.*

Soit ABC le triangle proposé ; si l'on tire les droites AO, BG qui divisent également les angles BAC, ABC, et que du point O où ces droites se coupent, on mène des perpendiculaires OP, OP', OP'' sur les côtés du triangle, on aura Fig. 238.

$OP = OP' = OP''$, $BP = BP''$, $CP' = CP''$, $AP = AP'$.

Après avoir prolongé les côtés BA, BC, si l'on prend

$$AD = CP' = CP'',$$

et qu'ayant mené par D une perpendiculaire sur BD, terminée en K par la ligne BO prolongée, on fasse

$$CM = CN = DR = AP' = AP, \text{ d'où } AM = CP' = CP'' = AD,$$

et qu'on tire les droites KN, KC, KM, KA, KR et CO, on aura

$$\begin{aligned} S &= \text{surf}\, OBC + \text{surf}\, OBA + \text{surf}\, OAC \\ &= \tfrac{1}{2} BC \times OP'' + \tfrac{1}{2} BA \times OP + \tfrac{1}{2} AC \times OP'. \end{aligned}$$

ou

$$S = OP\left(\frac{BC + BA + AC}{2}\right) = OP \times p.$$

Or

$$\begin{aligned} 2p &= AB + AC + BC = (BP + PA) + (AP' + P'C) + (BP'' + P''C) \\ &= (BP + BP'') + (AP + AP') + (CP' + CP'') \\ &= 2(BP + AP + CP') = 2(BP + AP + AD) = 2BD; \end{aligned}$$

donc

$$p = BD \quad \text{et} \quad S = OP \times BD.$$

Les triangles semblables BPO, BDK donnent

$$BP : PO :: BD : DK;$$

mais

$$BD : BD :: PO : PO;$$

donc

$$BP \times BD : PO \times BD :: BD \times PO : DK \times PO,$$

et conséquemment

$$BP\times BD : S :: S : DK\times PO, \text{ d'où } S^2 = BD\times BP\times DK\times PO.$$

Or

$$BN = BP'' + CP'' + CN = BP + AD + AP = BD;$$

donc les triangles BKN, BKD sont égaux, en observant que la ligne BK divise également l'angle DBN : ainsi l'angle KNB est droit comme l'angle KDB, et KN = KD; mais CN = DR, par construction; donc les deux triangles rectangles KNC, KDR sont égaux, et conséquemment KC = KR; d'ailleurs

$$AC = AP' + P'C = DR + AD = AR;$$

donc les triangles KAC, KAR sont égaux, d'où l'on conclut l'égalité des angles KCA, KRA ou des angles KCM, KRD : or DR = MC, KR = KC; donc les triangles KRD, KCM sont égaux, et conséquemment l'angle CMK est droit comme étant égal à KDR, et de plus KM = KD : ainsi les triangles rectangles KAM, KAD sont égaux, et conséquemment les angles AKM, AKD le sont aussi. Dans le quadrilatère ADKM, les angles en D et M étant droits, on a MAD + DKM = 2 angles droits = MAD + MAB; donc $\frac{1}{2}$ DKM = $\frac{1}{2}$ MAB ou DKA = PAO : les triangles rectangles KDA, APO sont donc semblables, et on en tire

$$PO : PA :: DA : DK, \text{ d'où } PO\times DK = PA\times DA;$$

la valeur de S^2 devient donc

$$S^2 = BD\times BP\times PA\times DA;$$

mais $BD = p$ et $PD = PA + AD = AP' + CP' = AC = b$; $BP + AD = BP'' + CP'' = BC = a$; donc

$$BD = p,\ AD = BD - AB = p - c,\ BP = BD - PD = p - b;$$
$$AP = BD - (BP + AD) = p - a.$$

et enfin

$$S^2=p(p-b)(p-c)(p-a), \text{ d'où } S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ce problème est un des plus utiles de la Géométrie pratique, puisqu'il fournit le moyen d'évaluer l'aire d'un polygone quelconque, sans employer d'autre instrument qu'une chaîne métrique ou le mètre lui-même; car en mesurant les trois côtés de chacun des triangles dans lesquels le polygone est décomposable, la formule précédente trouve immédiatement son application. Cependant cette méthode est beaucoup plus longue que celle que nous exposerons bientôt. On tire encore de la formule précédente, la démonstration du théorème qui suit.

Théorème LXIV. *Parmi tous les triangles de même base et de même périmètre, celui qui renferme la plus grande surface est le triangle dans lequel les deux côtés variables sont égaux.*

En effet, si l'on désigne la base par $2b$, la somme des deux autres côtés par $2m$, le périmètre par $2p$ et la surface par S, et qu'on représente l'un des côtés variables par $m+z$, l'autre sera $m-z$, on aura donc $2p=2m+2b$. Ces substitutions, faites dans la formule précédente, donneront

$$S=\sqrt{(m+b)(m-b)(b+z)(b-z)}=\sqrt{(m^2-b^2)(b^2-z^2)}.$$

Or les quantités m et b étant constantes, la surface du triangle sera d'autant plus grande que la quantité z sera plus petite, et le *maximum* de S correspondra au *minimum* de z, c'est-à-dire à $z=0$. Donc, etc.

Construction des Tables des sinus, tangentes et des logarithmes de ces lignes.

La construction des Tables trigonométriques n'est pas étrangère à l'intention de cet ouvrage, puisqu'elle fait partie de la Trigonométrie dont elle est même une des questions les plus importantes; cependant je me serais dispensé d'ajouter à ce qu'a dit M. *Legendre* sous ce titre, si je n'eusse trouvé dans le travail fait au bureau du Cadastre, et auquel cet illustre Géomètre a si puissamment contribué, tous les matériaux d'une doctrine complète sur cette matière; j'ai aussi consulté l'ouvrage notable de M. *Lacroix*, qui a pour titre : *Traité des Différences et des Suites*. Ce chapitre suppose la connaissance de plusieurs séries dont on trouvera l'analyse développée dans la seconde section de mon Algèbre, ainsi que tout ce qui est relatif à la formation des Tables des logarithmes des Nombres, dont il ne pouvait être question ici.

Quant à la division sexagésimale du cercle, qui est l'ancienne, nous nous contenterons de faire connaître les formules des sinus des arcs de trois en trois degrés, calculées sur le rayon égal à l'unité.

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 6^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 12^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}-1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$\sin 21^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)+\frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}+1)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 27^\circ = -\frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 33^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 39^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}\sqrt{(5+1)}-\frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 42^\circ = -\frac{1}{8}(\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{(5-1)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 51^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)+\frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 54^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$\sin 57^\circ = -\frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 63^\circ = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1)+\frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 66^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{5}+1)+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 69° = \frac{\sqrt{3}+1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) + \frac{\sqrt{3}-1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 72° = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 75° = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sin 78° = \frac{1}{8}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 81° = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 84° = \frac{\sqrt{3}}{8}(\sqrt{5}+1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

$$\sin 87° = \frac{\sqrt{3}-1}{8\sqrt{2}}(\sqrt{5}-1) + \frac{\sqrt{3}+1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$$

$$\sin 90° = 1.$$

On connaît déjà en parties du rayon, dans la division sexagésimale, les sinus de 30°, 45° et 60°.

On a

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1),$$

et de la formule connue,

$$\sin A = \sin(60° + A) - \sin(60° - A),$$

on déduit

$$\sin 75° = \sin 135° - \sin(-15°) = \sin 45° + \sin 15°,$$

qui sont donnés en partie du rayon.

Le sin 18° est le demi-côté du décagone inscrit ; or en désignant ce côté par $2x$, on sait qu'on a la proportion

$$1 : 2x :: 2x : 1 - 2x, \quad \text{d'où} \quad x = \sin 18° = -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5}.$$

On passe de là à $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$

$$\sin 54^\circ = \sin(72^\circ - 18^\circ) = \sin 72^\circ \cos 18^\circ - \cos 72^\circ \sin 18^\circ$$
$$= \cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ.$$

Enfin

$$\sin 36^\circ = \cos 54^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 54^\circ}.$$

De ces expressions ainsi trouvées, on tire toutes les autres au moyen de ces formules démontrées dans la Trigonométrie,

$$\sin A = \sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A)$$
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$

De la table précédente on peut déduire, au moyen de la formule $\frac{\sin A}{\cos A}$, ces expressions de quelques tangentes

$$\text{tang } 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$
$$\text{tang } 18^\circ = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \ (*)$$
$$\text{tang } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\text{tang } 36^\circ = \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}$$
$$\text{tang } 54^\circ = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$
$$\text{tang } 60^\circ = \sqrt{3}$$
$$\text{tang } 72^\circ = \sqrt{(5 + 2\sqrt{5})}$$
$$\text{tang } 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

(*) On a $\text{tang } 18^\circ = \dfrac{\frac{1}{4}\sqrt{5} - 1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{5 + \sqrt{5}}} = x$; d'où $x^2 = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$, et multipliant haut et bas par $5 - \sqrt{5}$, il vient $x^2 = \dfrac{20 - 8\sqrt{6}}{20} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, d'où $x = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$. On trouvera facilement les autres transformations.

La circonférence entière est maintenant divisée en 400 parties égales ou *degrés*, ensorte que le quart de circonférence est de 100 degrés : le degré est partagé en cent parties égales qu'on nomme *minutes*, et la minute elle-même en 100 parties ou *secondes* : ainsi le nouveau degré est le centième du quart de circonférence, la minute en est le dix-millième, et la seconde le cent-millième. Pour traduire un arc A de la nouvelle dans l'ancienne division, il faut faire la proportion

$$100 : 90 :: A : A' = \frac{9}{10} A.$$

Je supposerai connue la formule du développement du sinus d'un arc suivant les puissances ascendantes de cet arc, laquelle pour le rayon $= 1$, est (Alg., 2ᵉ sect.)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.} \ldots (1).$$

Cette série est encore convergente pour $x = 1$, c'est-à-dire pour l'arc égal au rayon : or la demi-circonférence π étant $= 3,14159\ 26535\ 89793\ 2$, etc. pour le rayon 1, on a la proportion

$$3,14159, \text{ etc.} : \pi \text{ ou } 200° :: 1 : x = 63°, 661977237, \textit{etc} :$$

on pourra donc, au moyen de la série précédente, calculer en parties du rayon l'unité, les sinus des arcs depuis 0° jusqu'à 63° 66′ dans la circonférence divisée en 400 parties.

Pour faciliter l'évaluation numérique des sinus, nous poserons

$$\sin x = A - B + C - D + E - F + \text{etc.} \ldots (2);$$

et le rapprochement des développemens (1) et (2) donnera

$$A = x,\ B = A^2 \tfrac{1}{6} A,\ C = A^2 \tfrac{1}{20} B,\ D = A^2 \tfrac{1}{42} C,\ E = A^2 \tfrac{1}{72} D, \text{ etc.}$$

Il suffira donc de calculer x^2 ou A^2 qui sera un facteur

constant dans les termes successifs : mais d'abord il convient de reconnaître la loi des dénominateurs 6, 20, 42, 72, etc. A cet effet, qu'on les écrive verticalement, et qu'on en prenne sur le fait les différences, puis les différences entre ces différences, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-dessous,

Nombres.	Diff. 1eres.	Diff. 2emes.
6		
20	14	
42	22	8
72	30	8
110	38	8
156	46	8
210	54	8
etc.	etc.	etc.

et on reconnaîtra que ces dénominateurs jouissent de la propriété de donner des différences secondes constantes, ensorte que par des additions, on pourra prolonger indéfiniment la colonne de ces diviseurs. En ajoutant, par exemple, 8 à 54, on obtient 62, différence première qui, ajoutée à 210, donne 272, diviseur qui suit immédiatement 210.

Qu'il s'agisse maintenant d'avoir avec neuf décimales exactes, le sinus de $\frac{1}{6}\pi$, qu'on sait être $=\frac{1}{2}$ rayon : on prendra l'arc $\frac{1}{6}\pi$ avec dix décimales, et on en formera le quarré, en faisant la multiplication sous la condition de ne retenir que dix décimales dans chacun des produits partiels, ainsi qu'il suit :

$$\begin{array}{r}
\frac{1}{6}\pi = 0,5235987756 \\
0,5235987756 \\
\hline
0,2617993878 \\
104719755 \\
15707963 \\
2617994 \\
471239 \\
41888 \\
3665 \\
367 \\
26 \\
3 \\
\hline
\frac{1}{6}\pi^2 = 0,2741556778
\end{array}$$

ensuite les multiples de $(\frac{1}{6}\pi)^2$ qui sont

$$\begin{array}{l}
1.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 0,2741556778 \\
2.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 0,5483113556 \\
3.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 0,8224670334 \\
4.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 1,0966227112 \\
5.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 1,3707783890 \\
6.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 1,6449340668 \\
7.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 1,9190897446 \\
8.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 2,1932454223 \\
9.(\frac{1}{6}\pi)^2 = 2,4674011002.
\end{array}$$

Au moyen de cette table auxiliaire, on conclura aisément les termes successifs A, B, C, D, E, etc., qui seront

A = 0,5235987756	— B = 0,0239245962
C = 0,0003279532	— D = 0,0000021407
E = 0,0000000082	
+ 0,5239267370	— 0,0239267369

ensorte qu'après la soustraction on trouve

$$\sin \frac{1}{6}\pi = 0,5000000001 ;$$

résultat exact dans les neuf premières décimales.

Le sinus de 1′ calculé par cette série est

$$\sin 1' = 0{,}00015\ 70796\ 32033\ 52556\ 52138, \text{ etc.};$$

d'ailleurs on a

$$\text{arc } 1' = 0{,}00015\ 70796\ 326, \text{ etc.}$$

Comme ces résultats s'accordent dans les douze premières décimales, on conclut avec certitude que de zéro à 1′ qui est $\frac{1}{10000}$ du quart de circonférence, on peut prendre les arcs pour les sinus, sous l'approximation de douze décimales; conséquemment il sera permis de regarder comme connus $\sin 50''$ et $\sin 5''$ et les multiples 1, 2, 3....9 de $(2 \sin 50'')$ et $(2 \sin 5'')^2$ dont nous allons avoir besoin et qu'on préparera d'avance.

Reprenons la formule connue

$$\sin(x+a) = \sin x \cos a + \sin a \cos x,$$

et retranchons-en de part et d'autre $\sin x$: nous aurons pour différence

$$\begin{aligned}\sin(x+a) - \sin x &= \sin x \cos a + \sin a \cos x - \sin x \\ &= \cos x \sin a - \sin x\,(1 - \cos a);\end{aligned}$$

mais $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2} a$; donc

$$\sin(x+a) - \sin x = \sin a \cos x - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin x \ldots\ldots (3).$$

On trouverait de même

$$\sin x - \sin(x-a) = \sin a \cos x + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a \sin x \ldots\ldots (4).$$

Retranchant (4) de (3), puis dégageant $\sin(x+a)$, on parvient à la formule

$$\sin(x+a) = \sin x + [\sin x - \sin(x-a)] - (2 \sin \tfrac{1}{2} a)^2 \sin x,$$

laquelle, par la substitution de $x+a$ pour x, devient

$$\sin(x+2a) = \sin(x+a) + [\sin(x+a) - \sin x] - (2\sin\tfrac{1}{2}a)^2 \sin(x+a) \ldots\ldots (5).$$

Si pour x on écrit $x-1'$, puis $x-10''$ dans la formule (5), et si de plus on y fait $a=1'$, $a=10''$, on obtiendra celles-ci

$$\sin(x+1') = \sin x + [\sin x - \sin(x-1')] - (2\sin 50'')^2 \sin x \ldots (6)$$

$$\sin(x+10'') = \sin x + [\sin x - \sin(x-10'')] - (2\sin 5'')^2 \sin x \ldots (7)$$

La première donnera les sinus depuis $1'$ jusqu'à $1°$, en y faisant successivement $x=1'$, $=2'$, $=3'$, etc., et on pourra vérifier par la série le sinus de $1°$ qu'on en aura conclu : le calçul par la série donne

$$\sin 1° = 0{,}01570\ 73173\ 11820\ 67575\ 3, \text{ etc.}$$

La seconde donnera les sinus de $10''$ en $10''$ depuis $1'$ jusqu'à $1°$, en y faisant aussi $x=10''$, $20''$, $30''$, etc.

On pourra donc calculer de $10''$ en $10''$ les sinus des arcs de $1°$ à $2°$, de $2°$ à $3°$, et ainsi de suite, lorsqu'on connaîtra ceux de $1°$, $2°$, $3°$, etc.

Mais lorsqu'on a déjà le sinus de $1°$ et celui de $50'$, on peut en faire dépendre les sinus de $2°$, de $3°$, etc. A cet effet, que dans la formule (5) on fasse $a=1°$, puis $x=0°$, $=1°$, $=2°$, $=3°$, etc., et on aura les relations suivantes

$$\sin 2° = \sin 1° + (\sin 1° - \sin 0°) + (2\sin 50')^2 \sin 1°$$

$$\sin 3° = \sin 2° + (\sin 2° - \sin 1°) + (2\sin 50')^2 \sin 2°$$

$$\sin 4° = \sin 3° + (\sin 3° - \sin 2°) + (2\sin 50')^2 \sin 3°.$$

etc.

Ayant donc fait le tableau des multiples du facteur constant $(2\sin 50')^2$ par les nombres 1, 2, 3 . . . . . 9, il ne restera plus qu'à effectuer des additions et des soustractions. En calcu-

lant ces élémens avec treize décimales, l'erreur, suivant M. *Delambre*, n'irait qu'à 0,00000 00000 06 sur le sin $\frac{1}{3}\pi$.

Passé ce terme, c'est-à-dire, de $\frac{1}{3}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi$, les sinus se calculeront par la formule

$$\sin\left(\tfrac{1}{3}\pi + a\right) = \sin\left(\tfrac{1}{3}\pi - a\right) + \sin a,$$

qu'on déduit des suivantes

$$\sin(x + a) = \cos a \sin x + \sin a \cos x$$
$$\sin(x - a) = \cos a \sin x - \sin a \cos x;$$

en retranchant la seconde de la première, et faisant dans la différence

$$\sin(x + a) - \sin(x - a) = 2 \sin a \cos x,$$

$x = \frac{1}{3}\pi$, d'où $\cos x = \frac{1}{2}$.

Nous reviendrons encore, par une autre voie, à l'évaluation de sin 1°.

On trouve dans la *Trigonométrie* de M. *Legendre* (pag. 347), cette équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - m = 0,$$

dans laquelle x représente le sinus du cinquième de l'arc dont le sinus est m. Pour $m = 1$, $x = \sin \frac{100}{5} = \sin 20°$, et, dans cette hypothèse, l'une des racines de l'équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$$

est 1, et en divisant l'équation par $x - 1$, on trouve pour quotient

$$16x^4 + 16x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0:$$

le premier membre est le quarré de $4x^2 + 2x - 1$, ensorte

que l'équation précédente devient

$$4x^2 + 2x - 1 = 0;$$

d'où

$$x = \sin 20^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0{,}30901\ 69943\ 74947;$$

résultat exact dans les quinze premières décimales. La racine négative prise positivement, donnerait le sinus de 60°. Connaissant sin 20° et cos 20°, on en déduit (page citée)

$$\sin 10^\circ = 0{,}15643\ 44650\ 40231$$
$$\sin 5^\circ = 0{,}07845\ 90957\ 27845 = n;$$

le sinus de 1° sera la plus petite racine de l'équation

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - n = 0,$$

en y faisant $n = \sin 5^\circ$. Or en prenant pour première approximation de la racine $x = \sin 1^\circ$. la longueur de l'arc de 1° qui est, en s'arrêtant aux six premières décimales,

$$0{,}015707,$$

nombre que nous représenterons par a, on fera, d'après la méthode exposée (Alg., 1[re] sect.) $x = a + x'$, et l'on trouvera

$$x' = -\frac{16a^5 - 20a^3 + 5a - n}{80a^4 - 60a^2 + 5};$$

et après les substitutions faites des valeurs numériques de a et n, on aura

$$x' = 0{,}00000\ 03173\ 11820\ 7.$$

Comme le premier chiffre significatif est du huitième ordre, on voit que les sept premières figures de la valeur de l'arc appartiennent au sinus : on aura par conséquent

$$x = \sin 1^\circ = 0{,}01570\ 73173\ 11821.$$

En faisant une opération de plus, c'est-à-dire en substituant pour a le nombre trouvé pour x, on trouve que le premier chiffre significatif de x'' est du seizième ordre ; d'où l'on conclut que la valeur précédente de x est exacte jusqu'au dernier chiffre.

Passons au calcul des tangentes en parties du rayon : en allant de minute en minute, ou de dix en dix millièmes, on aura en total dix mille tangentes, dont on calculera les 5000 premières en divisant le sinus par le cosinus. On déduira les 4400 qui suivent, de la formule

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=2\tan 2a+\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right),$$

qu'on obtient en faisant $m=\frac{\pi}{4}$ dans celle-ci

$$\tan(m\pm a)=\frac{\tan m\pm\tan a}{1\mp\tan m\,.\,\tan a},$$

qui devient par là

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\pm a\right)=\frac{1\pm\tan a}{1\mp\tan a},$$

d'où l'on déduit

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+a\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{4\tan a}{1-\tan^2 a}=2\tan 2a,$$

en observant que $\tan\frac{\pi}{4}=1$. Enfin pour avoir les 600 dernières tangentes, on aura recours à la série

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3^2.5}-\frac{2x^5}{3^3.5.7}-\frac{x^7}{3^3.5^2.7}-\frac{2x^9}{3^3.5.7.9.11}-\text{etc.}$$

qui est très convergente pour les arcs qu'on considère. Si l'on suppose, à l'imitation de ce qui a été fait,

$$\cot x=\frac{1}{x}-B'-C'-2D'-E'-F'-691G'-H'-I',\ \text{etc.},$$

on aura

$F' = x \,.\, \frac{1}{3}$	$F' = x^2 \,.\, \frac{10}{13} E'$
$C' = x^2 \,.\, \frac{1}{15} B'$	$G' = x^2 \,.\, \frac{1}{6825} F'$
$D' = x^2 \,.\, \frac{1}{21} C'$	$H' = x^2 \,.\, \frac{2}{195} F'.x$
$E' = x^2 \,.\, \frac{1}{5} D'$	$I' = x^2 \,.\, \frac{3617}{35700} H'.$

On a tiré de F' plutôt que de G' la valeur de H', pour l'avoir exprimée d'une manière plus simple. Le produit $F'x^2$ est évalué dans le calcul de G'

Les tangentes intermédiaires de dix en dix secondes, se calculeront par la formule

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Ayant ainsi de 0 à 100 degrés, les sinus et tangentes naturels, c'est-à-dire évalués en parties du rayon, on est dispensé de calculer les cosinus et cotangentes. Reste donc à chercher les logarithmes de ces nombres.

On a trouvé (Alg., 2e sect.)

$$\log(1 - x^2) = -2M\{\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^6 + \text{etc.}\},$$

dans laquelle $M = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$, etc.; mais à un arc x très-petit, on peut, ainsi que nous l'avons reconnu plus haut par le fait, substituer son sinus (*) : donc, dans cette hypothèse,

$$1 - xx = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x;$$

conséquemment

$$\log \cos x = -M\{\tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1}{4}\sin^4 x + \tfrac{1}{6}\sin^6 x + \text{etc.}\}\ldots(8),$$

série trouvée par M. *Delambre*, et qui donne les logarithmes

---

(*) Voyez, 2e sect. de l'Alg., une démonstration de cette proposition.

des cosinus des petits arcs, ou ceux des sinus des arcs voisins de 100 degrés.

La formule connue

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x\right) = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x\text{, d'où }\sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\cos\tfrac{1}{2}x},$$

donne les logarithmes des sinus des arcs au-dessous de 50°, lorsqu'on connaît ceux des sinus des arcs compris entre 50° et 100° : reste donc à calculer ces logarithmes. M. *Delambre* propose à cet effet la série

$$\log\sin(x+a) = \log\sin x + 2M\left\{\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right] + \tfrac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right]^3 + \tfrac{1}{5}\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right]^5\right\} + \text{etc.} \quad (9)$$

qui se déduit du développement

$$\log(n+x) = \log n + 2M\left\{\frac{x}{2n+x} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5 + \text{etc.}\right\},$$

en y faisant $n = \sin x$, $n + x = \sin(x+a)$, d'où $x = \sin(x+a) - \sin x$.

Pour $x = 50°$, et $a = 1°$, le log sin 51° sera donné par une série très-convergente : elle le sera d'autant plus que l'arc sera plus voisin de 100°, parce que la différence $\sin(x+a) - \sin x$ va toujours en décroissant, ce dont il est bien facile de s'assurer, tandis qu'au contraire le dénominateur $\sin(x+a) + \sin x$ va toujours en augmentant.

On a cette suite de transformations

$$\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x} = \frac{\tan\tfrac{1}{2}(x+a-x)}{\tan\tfrac{1}{2}(x+a+x)} = \frac{\tan\tfrac{1}{2}a}{\tan(x+\tfrac{1}{2}a)}$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}a\cot(x+\tfrac{1}{2}a),$$

en observant que $\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}$ est la différence de deux sinus, divisée par la somme des mêmes sinus, rapport qui est celui de la tangente de la demi-différence des arcs à la tangente de la demi-somme des mêmes arcs. Si l'on fait cette substitution dans (9), on obtient cet autre développement de log sin $(x+a)$, savoir

$$\log\sin(x+a)=\log\sin x+2M\left\{\text{tang}\,\frac{a}{2}\cot(x+\tfrac{1}{2}a)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{3}\left(\text{tang}\frac{a}{2}\right)^3\cot^3\left(x+\frac{a}{2}\right)+\tfrac{1}{5}\left(\text{tang}\frac{a}{2}\right)^5\cot^5\left(x+\frac{a}{2}\right)+\text{etc.}\right\}$$

Plus on approche de 100°, plus les termes de cette série deviennent petits et plus elle est convergente.

La formule (5) exigeant pour chaque sinus une multiplication qui, à la vérité, est abrégée par les multiples du facteur constant, préparés d'avance, est plus propre à calculer ou à vérifier un sinus en particulier, qu'à construire une table; nous pensons donc qu'on ne sera pas fâché de trouver ici un aperçu des moyens employés au bureau du Cadastre, pour obtenir les sinus et tangentes naturels avec une approximation qui dépasse tous les besoins.

Considérons une suite d'angles en progressions par différence égales : si l'on représente 2 sin $\frac{1}{2}$ a par p, on aura cette série de sinus et de différences successives :

Sinus.	1res différences.	2mes différences.	3mes différences.	4mes différences.
$\sin x$	$p\cos(x+\frac{1}{2}a)$	$-p^2\sin(x+a)$	$-p^3\cos(x+\frac{3}{2}a)$	$+p^4\sin(x+2a)$
$\sin(x+a)$	$p\cos(x+\frac{3}{2}a)$	$-p^2\sin(x+2a)$	$-p^3\cos(x+\frac{5}{2}a)$	$+p^4\sin(x+3a)$
$\sin(x+2a)$	$p\cos(x+\frac{5}{2}a)$	$-p^2\sin(x+3a)$	etc.	etc.
$\sin(x+3a)$	etc.	etc.		
etc.				

etc. . . (A)

Dans la colonne intitulée *premières différences*, se trouvent les différences entre chaque sinus et celui qui est immédiate-

ment au-dessus : la colonne des *deuxièmes différences* est donnée par une première différence moins que celle qui est au-dessus : les *différences troisièmes* résultent de la même manière de deux différences secondes consécutives, et ainsi de suite.

Ayant donc un premièr sinus, sin x, par exemple, et seulement le premier terme de chacune des colonnes de différences, on peut prolonger toutes ces colonnes par des additions, et enfin celle des sinus.

Il résulte de la loi de dérivation des différences successives, le tableau suivant :

$$\left.\begin{array}{l} +\ \sin(x+a) = +\sin x + p\cos(x+\tfrac{1}{2}a) \\ +p\cos(x+\tfrac{3}{2}a) = +p\cos(x+\tfrac{1}{2}a) - p^2\sin(x+a) \\ -p^2\sin(x+2a) = -p^2\sin(x+1a) - p^3\cos(x+\tfrac{3}{2}a) \\ -p^3\cos(x+\tfrac{5}{2}a) = -p^3\cos(x+\tfrac{3}{2}a) + p^4\sin(x+2a) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}\ldots(B)$$

Maintenant, pour abréger, posons

$$\left.\begin{array}{l} +p\cos(x+\tfrac{1}{2}a) = \Delta^1\sin x \\ -p^2\sin(x+1a) = \Delta^2\sin x \\ -p^3\cos(x+\tfrac{3}{2}a) = \Delta^3\sin x \\ +p^4\sin(x+2a) = \Delta^4\sin x \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\}\ldots\ldots(C)$$

les notations Δ^1, Δ^2, Δ^3, etc. écrites en avant de sin x, devant rappeler les différences successives relatives à sin x. Substituons ces abréviations dans les relations (B), et nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} +\ \sin(x+a) = \sin x + \Delta^1\sin x \\ +p\cos(x+\tfrac{3}{2}a) = \Delta^1\sin x + \Delta^2\sin x \\ -p^2\sin(x+2a) = \Delta^2\sin x + \Delta^3\sin x \\ -p^3\cos(x+\tfrac{5}{2}a) = \Delta^3\sin x + \Delta^4\sin x \\ +p^4\sin(x+3a) = \Delta^4\sin x + \Delta^5\sin x \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}\ldots(D)$$

Enfin, si l'on multiplie chaque membre des équations du tableau (D) par $-p^2$, et qu'en place des produits des premiers membres par ce facteur, on écrive leurs valeurs prises dans le tableau (C), on aura le suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 \sin x = -p^2 (\quad \sin x + \Delta^1 \sin x) \\ \Delta^3 \sin x = -p^2 (\Delta^1 \sin x + \Delta^2 \sin x) \\ \Delta^4 \sin x = -p^2 (\Delta^2 \sin x + \Delta^3 \sin x) \\ \Delta^5 \sin x = -p^2 (\Delta^3 \sin x + \Delta^4 \sin x) \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\text{(E)}$$

auquel il faut joindre cette valeur de la différence première

$$\Delta^1 \sin x = \sin a \cos x - \tfrac{1}{2} p^2 \sin x.$$

Du tableau (E), on déduit cette formule genérale

$$\Delta^n \sin x = -p^2 (\Delta^{n-2} \sin x + \Delta^{n-1} \sin x);$$

et on remarque que pour un autre sinus de départ, on est obligé de calculer de nouveau une suite de différences relatives à ce sinus : c'est ce qui a déterminé M. *Legendre* à rechercher une formule qui fasse dépendre les différences successives du sinus de tout arc, de celles des sinus de deux arcs fixes qui sont zéro et le quart de la circonférence. A cet effet, qu'on se reporte au tableau (C), et on aura, par le développement des premiers membres, celui qui suit :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^1 \sin x = +p \cos x \cos \tfrac{1}{2} a - p \sin x \sin \tfrac{1}{2} a \\ \Delta^2 \sin x = -p^2 \cos x \sin 1a - p^2 \sin x \cos 1a \\ \Delta^3 \sin x = -p^3 \cos x \cos \tfrac{3}{2} a + p^3 \sin x \sin \tfrac{3}{2} a \\ \Delta^4 \sin x = +p^4 \cos x \sin 2a + p^4 \sin x \cos 2a \\ \Delta^5 \sin x = +p^5 \cos x \cos \tfrac{5}{2} a - p^5 \sin x \sin \tfrac{5}{2} a \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\text{(F)}.$$

Si l'on représente le quart de la circonférence par 1, et

qu'on fasse les hypothèses $x=0$, $x=1$, le tableau (F) donnera

$x=0$	$x=1$
$\Delta^1 \sin 0 = +p \cos \frac{1}{2}a$	$\Delta^1 \sin 1 = -p \sin \frac{1}{2}a$
$\Delta^2 \sin 0 = -p^2 \sin 1a$	$\Delta^2 \sin 1 = -p^2 \cos 1a$
$\Delta^3 \sin 0 = -p^3 \cos \frac{3}{2}a$	$\Delta^3 \sin 1 = +p^3 \sin \frac{3}{2}a$
$\Delta^4 \sin 0 = +p^4 \sin 2a$	$\Delta^4 \sin 1 = +p^4 \cos 2a$
$\Delta^5 \sin 0 = +p^5 \cos \frac{5}{2}a$	$\Delta^5 \sin 1 = -p^5 \sin \frac{5}{2}a$
etc.	etc.

....(G).

Les valeurs des différences d'un même ordre qui se rapportent à sin o et à sin 1, dans le tableau précédent, étant les coefficiens de $\sin x$ et $\cos x$ dans les différences successives (F), on pourra en faire les substitutions qui donneront ces nouvelles expressions des différences consécutives de $\sin x$

$$\Delta^1 \sin x = \cos x \, \Delta^1 \sin 0 + \sin x \, \Delta^1 \sin 1$$
$$\Delta^2 \sin x = \cos x \, \Delta^2 \sin 0 + \sin x \, \Delta^2 \sin 1$$
$$\Delta^3 \sin x = \cos x \, \Delta^3 \sin 0 + \sin x \, \Delta^3 \sin 1$$
etc.

d'où résulte ce terme général des différences

$$\Delta^n \sin x = \cos x \, . \, \Delta^n \sin 0 + \sin x . \, \Delta^n \sin 1 ,$$

qui est la formule annoncée.

Or pour $x=0$ et $a=0{,}0001=1'$, on a

$$\Delta^1 \sin 0 = \sin 0{,}0001 ,$$

et pour $x=1$, $a=0{,}0001$, on a

$$\Delta^1 \sin 1 = -\frac{p^2}{2} = -2\sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1 - \cos a = 1 - \cos 0{,}0001 ;$$

Ces deux premières différences calculées, les autres en résultent d'après le tableau (E), en faisant dans les formules qu'il contient, $x = 0$, puis $x = 1$: il reste donc à multiplier par $\cos x$ la différence relative au $\sin 0$, et par $\sin x$ celle de même ordre, qui se rapporte à $\sin 1$, et à faire la somme de ces deux produits.

Les élémens à calculer sont donc

$\Delta^1 \sin 0 =$ $\sin 0,0001 = 0,00015\ 70796\ 32033\ 52556\ 52138$, etc.
$\Delta^1 \sin 1 = 1 - \cos 0,0001 = 0,00000\ 00123\ 37005\ 47599\ 47475\ 02$, etc.
$p^2 = 2\,(1 - \cos 0,0001) = 0,00000\ 00246\ 74010\ 95198\ 94950$, etc.

Si l'on évalue les différences successives de $\sin 0$, $\sin 1$, c'est-à-dire,

Δ^1 avec 25 décimales.
Δ^2.....26
Δ^3.....28
Δ^4.....29
Δ^5.....30
Δ^6.....32
Δ^7.....33
Δ^8.....34
Δ^9.....35,

puis le sinus et le cosinus d'un arc de départ, par exemple, de 0,01 du quart de circonférence avec 21 décimales exactes, et qu'on déduise de ces élémens, d'après la formule

$$\Delta^n \sin x = \cos x \,.\, \Delta^n \sin 0 + \sin x \,.\, \Delta^n \sin 1\,,$$

les différences $\Delta^1 \sin x$, $\Delta^2 \sin x \ldots\ldots \Delta^9 \sin x$, on aura par de simples additions et soustractions de ces différences, indiquées par le tableau (A), les sinus de 0,01 à 0,02, de dix en dix millièmes avec 21 décimales exactes. Arrivé à 0,02, on en calculera le sinus et le cosinus, *à priori*, puis les neuf différences correspondantes, et on interpolera de la même manière les cent sinus de 0,02 à 0,03, et ainsi de suite.

Pour les tangentes, les différences ne se présentent pas sous une forme aussi commode : d'ailleurs elles se déduisent si facilement des sinus et cosinus, au moins dans la digression de 0 à 0,5, comme nous l'avons dit plus haut, qu'il est inutile de recourir à d'autres formules.

C'est par ces procédés et d'autres qui leur sont analogues, mais qui ne peuvent trouver place ici, qu'ont été calculées dans les bureaux du Cadastre, les grandes tables des sinus et tangentes naturels avec 22 décimales exactes, ainsi que les logarithmes des nombres, travail dont j'ai consigné l'annonce dans le discours préliminaire qui accompagne celles de *Callet*. Dans le rapport fait à l'institut, MM. *Lagrange*, *Laplace* et *Delambre* disent de ces tables, *qu'elles sont le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui ait jamais été exécuté ou même conçu*. Un des grands avantages de l'emploi de ces méthodes, était de pouvoir mettre en œuvre à la fois un nombre indéfini de calculateurs de la plupart desquels on ne pouvait attendre d'autres connaissances que celle de l'addition et de la soustraction. L'impression de ce grand travail a été suspendue par différentes raisons ; mais, ajoutent les Géomètres chargés de ce rapport, « espérons que, dans des temps de paix et de bonheur, un Gouvernement, ami des sciences et des arts, ordonnera l'achèvement d'un ouvrage qui doit être desiré de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques. » Un tel vœu émis par les premiers Géomètres, est pour moi une raison de plus de me féliciter d'avoir coopéré à ce grand œuvre dont la publication serait pour tous les collaborateurs l'indemnité la plus flatteuse et la plus réelle. Nous terminerons en recommandant la lecture des discours qui se trouvent en tête des tables de *Callet* et de celles de *Borda*, revues, augmentées et publiées par M. *Delambre*.

Sur la Trigonométrie sphérique.

Théorème LXV. *Les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés à ces angles.*

Soient ABA′B′, BCB′C′, ACA′C′ trois grands cercles de la sphère dont le centre est en O ; si l'on joint le point O aux points A, B, C par des droites AO, CO, BO, on formera une pyramide triangulaire OACB dont les angles entre les faces sont les mêmes que ceux du triangle sphérique ABC ; car, par exemple, l'angle en B est celui de deux tangentes en B aux arcs BA, BC ; l'angle entre ces tangentes est visiblement l'angle d'inclinaison de la face COB sur la face AOB. Les angles entre les arêtes, savoir, COB, COA, AOB sont mesurés par les arcs CB, AC, AB du triangle sphérique. Nous désignerons ces arcs par a, b, c, et les angles entre les faces, savoir, entre COA et BOA, BOC et BOA, COA et COB qui sont BAC, CBA, ACB, par A, B, C ; ensorte que les angles A, B, C entre les faces, soient opposés aux angles a, b, c entre les arêtes. Fig. 234.

Supposons la pyramide OACB développée sur le plan de la face AOB, et construisons en DEG l'angle A opposé à la face a, et en D′FG l'angle B opposé à la face b, et prenant OC = OC′ pour le rayon des tables, on aura Fig. 235.

$$DG : \sin DEG :: ED \text{ ou } CE : 1$$
$$D'G : \sin D'FG :: D'F \text{ ou } FC' : 1;$$

donc, en observant que $CE = \sin b$, $FC' = \sin a$, et que, par construction, $DG = D'G$, on a

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a;$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ldots\sin A : \sin B :: \sin a : \sin b \\ \text{On trouverait de même} \\ (2)\ldots\sin A : \sin C :: \sin a : \sin c \\ (3)\ldots\sin B : \sin C :: \sin b : \sin c\end{array}\right\}\ldots\ldots(A).$$

Donc les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés

Théorème LXVI. a, b, c *étant toujours les côtés d'un triangle spherique, A l'angle opposé au côté* a, *on a l'analogie*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Fig.235. Menant les droites GH, EK l'une parallèle et l'autre perpendiculaire à OF, on aura

$$OF = \cos a = OK + KF = OK + GH.$$

Or

$$OK : OE :: \cos c : 1 ; \text{ d'où } OK = \cos b \cos c.$$

$$\left.\begin{array}{l}GH : EG :: \sin c : 1 \\ EG : ED :: \cos A : 1\end{array}\right\} \text{ d'où } GH = \sin b \sin c \cos A ;$$

donc

$$\left.\begin{array}{l}(4)\ldots\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \text{et de même} \\ (5)\ldots\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ (6)\ldots\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\end{array}\right\}\ldots\ldots(B).$$

Corollaire Ier. Les faces de la pyramide supplémentaire, c'est-à-dire les angles entre les arêtes, sont (Réc., Théor. LII, pag 220) $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, π étant la demi-circonférence : les cosinus sont $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$; l'angle opposé à la face $\pi - A$ est $\pi - a$ dont le cosinus est

$-\cos a$. Donc, pour cette pyramide supplémentaire, les équations (4), (5) et (6) deviendraient

$$\left.\begin{array}{l}(7)\ldots -\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a\\(8)\ldots -\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b\\(9)\ldots -\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c\end{array}\right\}\ldots(C).$$

Corollaire II. La valeur de $\cos c$, donnée par l'équation (6), étant substituée dans l'équation (4), donne la suivante

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

laquelle, à cause de $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ et du facteur commun $\sin b$, devient

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A.$$

Prenant dans l'équation (2) pour $\sin c$ sa valeur........ $\sin c = \dfrac{\sin a \sin C}{\sin A}$, et la substituant dans la dernière équation, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}(10)\ldots \cot a \sin b = \cot A \sin C + \cos b \cos C\\\text{et par analogie}\\(11)\ldots \cot a \sin c = \cot A \sin B + \cos c \cos B\\(12)\ldots \cot b \sin a = \cot B \sin C + \cos a \cos C\\(13)\ldots \cot b \sin c = \cot B \sin A + \cos c \cos A\\(14)\ldots \cot c \sin a = \cot C \sin B + \cos a \cos B\\(15)\ldots \cot c \sin b = \cot C \sin A + \cos b \cos A\end{array}\right\}(D).$$

L'ensemble de ces équations comprend la solution de toutes les questions de trigonométrie sphérique, car elles donnent les quatre relations simples qui existent entre les six élémens du triangle sphérique.

Le système (A) donne la relation entre deux côtés et deux angles opposés à ces côtés.

Le système (B) donne la relation entre les trois côtés et un angle.

Le système (C) entre trois angles et un côté.

Le système (D) entre deux côtés et deux angles dont l'un est opposé et l'autre adjacent au même côté donné.

Lorsque le triangle sphérique est rectangle, un des angles, l'angle A, par exemple, est droit, et les premières équations des systèmes (A), (B), (C) et (D) deviennent

$$\left.\begin{array}{l}(16)\ldots\ldots \sin a = \dfrac{\sin b}{\sin B}\\ (17)\ldots\ldots \cos a = \cos b \cos c\\ (18)\ldots\ldots \cos a = \cot B \cot C\\ (19)\ldots\ldots \cot a = \cot b \cos C\end{array}\right\}\ldots\ldots(E).$$

Lorsque l'angle C est droit, les premières équations des systèmes (C) et (D) donnent

$$\left.\begin{array}{l}(20)\ldots\ldots \cos A = \sin B \cos a\\ (21)\ldots\ldots \cot A = \cot a \sin b\end{array}\right\}\ldots\ldots(F).$$

Les six équations (E) et (F) donnent directement la solution de tous les cas des triangles sphériques rectangles, et comme elles sont sous une forme commode pour l'emploi des logarithmes, on s'en sert communément dans la trigonométrie, en décomposant tous les triangles en triangles rectangles par l'abaissement d'une perpendiculaire.

Nous renverrons, pour le surplus, au n° 8 de la *Correspondance sur l'Ecole Impériale Polytechnique*, dont nous avons extrait ce qui précède.

Il sera bon de montrer l'identité des principes qui servent de base à la Trigonométrie rectiligne et à la Trigonométrie sphérique.

Fig. 236. Soient AD la tangente et OD la sécante de l'arc AB; soient

AE la tangente et OE la sécante de l'arc AC. Si l'on désigne par a, b, c les côtés BC, AB, AC du triangle sphérique construit sur la surface d'une sphère dont le centre est O, et par A, B, C les angles opposés à ces côtés, le triangle rectiligne ADE dont nous représenterons le côté DE par x, donnera

$$x^2 = \text{tang}^2 b + \text{tang}^2 c - 2 \text{ tang } b \text{ tang } c \cos A;$$

le triangle ODE donnera de même

$$x^2 = \text{séc}^2 b + \text{séc}^2 c - 2 \text{ séc} . b \text{ séc } c \cos A;$$

soustrayant la seconde équation de la première, et observant que $\text{séc}^2 b - \text{tang}^2 b = 1$, on aura, réduction faite,

$$1 + \frac{\sin b}{\cos b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \cos A - \frac{\cos a}{\cos b \cdot \cos c} = 0,$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{array}\right\} \ldots\ldots (a).$$

La combinaison de ces trois équations donne la résolution de tous les cas possibles des triangles sphériques.

Si de la première de ces trois équations, on tire la valeur de $\cos A$ et qu'on l'introduise dans $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, on aura, après les réductions,

$$\sin A = \sin a \times \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c\}}}{\sin a . \sin b . \sin c};$$

Si l'on désigne par M le facteur de $\sin a$, lequel est symétrique au moyen des sinus et cosinus des côtés a, b, c, on pourra écrire

$$\sin A = M \sin a \ldots\ldots (1);$$

les deux dernières équations (α) donneront par un calcul semblable

$$\sin B = M \sin b \ldots\ldots (2)$$
$$\sin C = M \sin c \ldots\ldots (3).$$

On conclut de ces trois relations que les sinus des angles d'un triangle sphérique, sont proportionnels aux sinus des côtés opposés, propriete trouvée plus haut par une autre voie.

Des équations (α), on tire

$$\left.\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (\mathrm{C}).$$

Si entre les première et troisième équations (α), on élimine $\cos c$, on aura

$$\cos A \sin c + \cos C \sin a \cos b = \cos a \sin b \ldots (4);$$

mais, d'après les équations (1), (2) et (3), on a

$$\sin c = \sin a \frac{\sin C}{\sin A};$$

donc

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b;$$

d'ailleurs

$$\cot a \sin b = \cos a \frac{\sin b}{\sin a} = \cos a . \frac{\sin B}{\sin A};$$

donc l'équation (4) deviendra

$$\cos A \sin C = \cos a \sin B - \sin A \cos C \cos b \ldots (5);$$

on trouvera pareillement

$$\cos B \sin C = \cos b \sin A - \sin B \cos C \cos a \ldots\ldots (6).$$

Eliminant $\cos b$ entre (5) et (6), on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l} \cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C \\ \text{et de même} \\ \cos B = \cos b \sin A \sin C - \cos A \cos C \\ \cos C = \cos c \sin A \sin B - \cos A \cos B \end{array}\right\} \ldots (\gamma).$$

qui sont les relations (C) trouvées (pag. 291).

Il est remarquable que le système (C) se déduit de (α); et réciproquement, en écrivant A, B, C au lieu de a, b, c, *et vice versâ*, les cosinus étant affectés du signe négatif.

Voyez pour les détails, les *Traités de Trigonométrie* de MM. *Legendre* et *Lacroix*, et un beau *Mémoire* de l'illustre *Lagrange* (sixième numéro du *Journal de l'Ecole Polytechnique*).

De la Polygonométrie et de la Polyédrométrie.

On entend par *polygonométrie*, l'art de déterminer, dans un polygone rectiligne quelconque, plusieurs de ses parties à l'aide de celles qui sont connues. Pour effectuer de telles opérations, il faut donc, comme pour les triangles, connaître les diverses relations qui existent entre les côtés et les angles d'un polygone. Les premiers essais en ce genre sont dus à *Lambert*; mais ce grand Géomètre ne s'occupa que des quadrilatères, et encore se borna-t-il à indiquer la marche à suivre pour former une *tétragonométrie* complette. Après lui d'autres savans étendirent cette théorie, entre autres *Lexell*, dans deux excellentes dissertations insérées dans les 19 et 20e volumes des *Mémoires de Pétersbourg*. Messieurs *Lhuilier* de Genève et *Carnot* ont enrichi cette matière de leurs propres découvertes.

La *polyédrométrie* est aux polyèdres ce qu'est la polygonométrie aux polygones : cette partie de la géométrie des solides dans laquelle on considère les diverses relations entre les angles dièdres et leurs faces, est encore trop peu avancée pour former une doctrine complète. Nous nous bornerons, à l'égard de ces deux branches de la géométrie, à faire connaître les propositions les plus intéressantes et les théorèmes les plus élégans.

Théorème LXVII. *Dans tout polygone plan, chaque côté est egal à la somme de tous les autres multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier.*

Fig. 237. Ce théorème est évident à l'inspection de la figure; car dans le quadrilatère ABCD, la base AB est égale à la somme des segmens A*d*, *dc*, *c*B, et chacun de ces segmens est égal à l'hypoténuse d'un triangle rectangle, multipliée par le cosinus de l'angle que fait cette hypoténuse avec AB.

Posant donc AB $= a$, BC $= b$, CD $= c$, DA $= d$, et désignant par (a, b) l'angle de AB avec BC ou de a avec b, par (a, c) l'angle de AB avec CD ou de a avec c, par (a, d) l'angle de AB avec AD ou de a avec d, on aura

$$a = b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d).$$

Cette proposition qui sert de base à la théorie dont il s'agit, n'est pas restreinte aux polygones plans, comme il est aisé de le démontrer, et l'on conçoit qu'elle s'étend à un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Théorème LXVIII. *Dans tout polygone, la somme des côtés multipliés chacun par le cosinus de l'angle que forme sa direction prise dans le sens du périmètre, avec une droite quelconque tracée à volonté dans le plan de ce polygone, est égale à zéro.*

Fig. 238. Soit AX la droite à laquelle on rapporte tous les côtés du polygone ADCB, et nommons x cette droite indéfinie, on

aura, en vertu du théorème précédent, et en faisant usage de la notation adoptée,

$$Ab = b \cos(b, x) + c \cos(c, x) + d \cos(d, x).$$

D'un autre côté, le triangle rectangle ABb donne

$$Ab = a \cos \mathrm{BAX};$$

donc

$$a \cos \mathrm{BAX} = b \cos(b, x) + c \cos(c, x) + d \cos(d, x).$$

Mais on sait que $\cos(200^d - z) = -\cos z$, donc

$$\cos \mathrm{BAX} = -\cos \mathrm{BAX}' = -\cos(a, x);$$

donc

$$a \cos(a, x) + b \cos(b, x) + c \cos(c, x) + d \cos(d, x) = 0.$$

Remarque.

Les angles (d, x), (c, x), (b, x), (a, x) sont les mêmes que les angles (d, a), (c, a), (b, a) du théorème précédent, dans lequel le côté AB tenait lieu de l'axe AX; et au lieu de l'angle $(a, x) = \mathrm{BAX}$ qui serait nul dans le théorème cité, et dont le cosinus serait l'unité, on prend ici l'angle supplémentaire dont le cosinus est le même, à la différence du signe.

Théorème LXIX. *Dans tout polygone, le quarré d'un côté quelconque est égal à la somme des quarrés de tous les autres côtés, moins deux fois les produits de tous ces autres côtés multipliés deux à deux et par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.* Fig. 239.

Posons toujours $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, $\mathrm{CD} = c$, $\mathrm{DA} = d \ldots$, on aura, par le théorème LXVII,

$$\begin{aligned}
(1)\ldots a &= b \cos(a, b) + c \cos(a, c) + d \cos(a, d)\\
(2)\ldots b &= a \cos(b, a) + c \cos(b, c) + d \cos(b, d)\\
(3)\ldots c &= a \cos(c, a) + b \cos(c, b) + d \cos(c, d)\\
(4)\ldots d &= a \cos(d, a) + b \cos(d, b) + c \cos(d, c),
\end{aligned}$$

en observant que pour passer de (1) à (2), il ne faut que changer dans (1) a en b et b en a; que pour passer de (2) à (3), il ne faut que changer dans (2) b en c, et réciproquement c en b et ainsi des autres.

Multipliant par a la première équation, la seconde par b, la troisième par c, la quatrième par d, etc., et ôtant la somme des derniers produits du premier, il viendra

$$a^2=b^2+c^2+d^2+\text{etc.}-2\{bc\cos(b,c)+bd\cos(b,d)+cd\cos(c,d)+\text{etc.}\}$$

ce qui est la propriété énoncée, et on remarquera que celle du triangle obliquangle (Théor. X, pag. 90) n'est qu'un cas particulier de ce principe général.

Pour introduire dans la formule ci-dessus les angles même du polygone que nous supposerons de quatre côtés, on remarquera que

$$(b,c)=\text{C},\quad (b,d)=\text{C}+\text{D}-200^d,\quad (c,d)=\text{D};$$

donc

$$a^2=b^2+c^2+d^2+\text{etc.}-2\{bc\cos\text{C}-bd\cos(\text{C}+\text{D})+cd\cos\text{D}+\text{etc.}\}.$$

Pour le pentagone, on trouverait

$$a=b^2+c^2+d^2+e^2-2\left\{\begin{matrix}bc\cos\text{C}-bd\cos(\text{C}+\text{D})+be\cos(\text{C}+\text{D}+\text{E})\\+cd\cos\text{D}-ce\cos(\text{D}+\text{E})+de\cos\text{E}\end{matrix}\right\}$$

propriété qu'il sera facile d'étendre à des polygones d'un nombre quelconque de côtés.

Théorème LXX. *Le double de l'aire d'une figure rectiligne quelconque, est égal à la somme des produits de ses côtés, excepté un, multipliés deux à deux, et par le sinus des angles qu'ils comprennent.*

Désignons par S l'aire du quadrilatère cherché; si on prolonge

CD, BA jusqu'à leur rencontre en O, on aura Fig. 237.

$$S = \text{surf } OCB - \text{surf } ODA;$$

si on fait $OA = \alpha$, $OD = \gamma$, on aura

$$\text{surf } OCB = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O$$
$$\text{surf } ODA = \tfrac{1}{2}\,\alpha\gamma \sin O.$$

Dès lors

$$S = \tfrac{1}{2}(c+\gamma)(a+\alpha)\sin O - \tfrac{1}{2}\,\alpha\gamma\sin O$$
$$= \tfrac{1}{2}ac\sin O + \tfrac{1}{2}a\gamma\sin O + \tfrac{1}{2}\alpha c\sin O;$$

d'ailleurs le triangle ODA donnant

$$\left.\begin{array}{l} \alpha : d :: \sin D : \sin O \\ \gamma : d :: \sin A : \sin O \end{array}\right\} \text{ on aura } \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{d \sin D}{\sin O} \\ \gamma = \dfrac{d \sin A}{\sin O} \end{array}\right.$$

et la valeur de S deviendra

$$S = \tfrac{1}{2}ac\sin O + \tfrac{1}{2}ad\sin A + \tfrac{1}{2}cd\sin D.$$

On peut introduire dans cette formule les angles du polygone; car

$$(a, c) = O = A + D - 200^d,\ (a, d) = A,\ (c, d) = D;$$

donc

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{ad\sin A - ac\sin(A+D) + cd\sin D\right\}.$$

Un procédé analogue donnerait pour l'aire du pentagone ABCDE, Fig. 239.

$$S = \tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} ab\sin B - ac\sin(B+C) + ad\sin(B+C+D) \\ +bc\sin C - bd\sin(C+D) + cd\sin D \end{array}\right\}.$$

On composerait facilement des formules représentatives des aires des autres polygones.

Remarque.

Il faut observer, 1°. qu'il s'agit ici, comme dans les formules précédentes, des angles intérieurs du polygone; 2°. que le principal avantage de ces formules consiste en ce qu'elles dispensent de construire une figure : elles se présenteraient sous une forme plus symétrique relativement aux signes, si au lieu des angles intérieurs du polynome, on employait les angles extérieurs, c'est-à-dire ceux qui sont formés par un côté de la figure et le prolongement du côté suivant. (Voyez le n° 59 et suivant du *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, par *Puissant*.

Problème LXXXXV. *Connaissant dans le quadrilatère ABCD, les côtés* b, c, d *et les angles A, D, on demande les autres parties du polygone.*

Fig. 237. On voit sur-le-champ que la perpendiculaire C*c* est en même temps égale à $b \sin(a,b)$ et à $c \sin(a,c) + d \sin(a,d)$; donc

$$b \sin(a,b) = c \sin(a,c) + d \sin(a,d);$$

c'est-à-dire,

$$b \sin B = d \sin A - c \sin(A + D),$$

formule qui donne l'angle B. Pour trouver le côté a, on mènera de A une perpendiculaire Ad' sur CB, et on aura, comme précédemment,

$$a \sin(b,a) = c \sin(b,c) + d \sin(b,d)$$

cette formule devient

$$a \sin B = c \sin C - d \sin(C + D):$$

les angles A, D, B étant connus, on a

$$C = 400^\circ - (A + D + B),$$

et conséquemment on peut calculer a.

On pourrait encore recourir à la formule

$$a = b\cos(a,b) + c\cos(a,c) + d\cos(a,d),$$

démontrée (Théor. LXVII, pag. 296).

De ces deux formules

$$b\cos(a,b) = a - c\cos(a,c) - d\cos(a,d)$$
$$b\sin(a,b) = c\sin(a,c) + d\sin(a,d),$$

on tire par la division

$$\text{tang}(a,b) = \text{tang B} = \frac{d\sin A - c\sin(A+D)}{a - d\cos A + c\cos(A+D)},$$

et par la même raison

$$\text{tang A} = \frac{c\sin D - b\sin(C+D)}{d - c\cos D + b\cos(C+D)};$$

formule qui servirait à évaluer le troisième angle d'un quadrilatère, si l'on connaissait trois de ses côtés et les angles compris entre les côtés connus.

Problème LXXXVI. *Résoudre le pentagone ABCDE.*

Après avoir abaissé la perpendiculaire CC′ sur AD, on trouve ces deux valeurs de CC′, savoir $b\sin B$ et $c\sin(c,a) + d\sin(d,a) + e\sin A$; ainsi Fig. 239.

$$b\sin B = e\sin A + d\sin(d,a) + c\sin(c,a).$$

Or si l'on suppose les côtés DE, CD prolongés jusqu'à la rencontre de BA, on trouve

$$\text{l'angle } (d,a) = A + E - \pi;$$
$$\text{l'angle } (c,a) = A + E + D - 2\pi,$$

π étant la demi-circonférence : on a donc

$$b\sin B = e\sin A - d\sin(A+E) + c\sin(A+E+D).$$

Mais si au lieu de calculer B, il fallait déduire de cette relation la valeur de l'angle A, on serait obligé de développer les facteurs dans lesquels cet angle se trouve engagé. On aurait ainsi

$$b \sin B = e \sin A - d \sin A \cos E - d \cos A \sin E \\ + c \sin A \cos (D + E) + c \cos A \sin (D + E);$$

et après avoir substitué pour cos A sa valeur $\sqrt{1 - \sin^2 A}$, l'inconnue A serait donnée par une équation du second degré.

Pour $b = 0$, le pentagone se change en quadrilatère, et la formule précédente donne, après la division par cos A,

$$\tang A = \frac{d \sin E - c \sin (D + E)}{e - d \cos E + c \cos (D + E)},$$

et comme alors l'angle D devient C, l'angle E devient D, e devient d, d se change en c, et c en b, on a

$$\tang A = \frac{c \sin D - b \sin (C + D)}{d - c \cos D + b \cos (C + D)}.$$

Problème LXXXXVII. *Evaluer la surface d'un polygone; connaissant l'un de ses côtés et les angles aux deux extrémités de ce côté entre ce même côté et les autres sommets du polygone.*

Il n'est pas toujours possible de mesurer tous les côtés et tous les angles d'un polygone; souvent même on est réduit à prendre pour base unique un de ses côtés, et à déterminer les sommets des angles par des intersections. Nous allons montrer comment on peut, dans ce cas, évaluer la surface.

Fig. 240. Soient ABCDE le polygone proposé, AB $= a$ la base mesurée : soient en outre les angles observés au point A

$$EAB = \varepsilon, \quad DAB = \delta, \quad CAB = \gamma,$$

les angles observés au point B,

$$EBA = \varepsilon', \quad DBA = \delta', \quad CBA = \gamma',$$

on a

$$\text{surf } EAD = \frac{AE \times AD}{2} \sin EAD\,;$$

mais le triangle AEB donne

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon') : a :: \sin \varepsilon' : AE = \frac{a \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}\,;$$

le triangle DAB donne

$$\sin(\delta + \delta') : a :: \sin \delta' : AD = \frac{a \sin \delta'}{\sin(\delta + \delta')},$$

donc

$$\text{surf. } EAD = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \varepsilon' \sin \delta'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \sin(\varepsilon - \delta),$$

on trouverait

$$\text{surf. } DAC = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \delta' \sin \gamma'}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \sin(\delta - \gamma)$$

$$\text{surf. } CAD = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')}.$$

Par conséquent l'aire cherchée est

$$\text{surf. } AEDCB = \tfrac{1}{2} a^2 \begin{cases} \dfrac{\sin \varepsilon' \sin \delta' \sin(\varepsilon - \delta)}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \\ + \dfrac{\sin \delta' \sin \gamma' \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \\ + \dfrac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')}. \end{cases}$$

Prenant le point B pour sommet commun des triangles qui composent la surface du polygone, on parvient à

$$\text{surf. } ABCDE = \tfrac{1}{2} a^2 \begin{cases} \dfrac{\sin \gamma \sin \delta \sin(\gamma' - \delta')}{\sin(\gamma + \gamma') \sin(\delta + \delta')} \\ + \dfrac{\sin \delta \sin \gamma \sin(\delta' - \gamma')}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \\ + \dfrac{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}. \end{cases}$$

Mais si au lieu de calculer B, il fallait déduire de cette relation la valeur de l'angle A, on serait obligé de développer les facteurs dans lesquels cet angle se trouve engagé. On aurait ainsi

$$b \sin B = e \sin A - d \sin A \cos E - d \cos A \sin E$$
$$+ c \sin A \cos (D + E) + c \cos A \sin (D + E);$$

et après avoir substitué pour $\cos A$ sa valeur $\sqrt{1 - \sin^2 A}$, l'inconnue A serait donnée par une équation du second degré.

Pour $b = 0$, le pentagone se change en quadrilatère, et la formule précédente donne, après la division par $\cos A$,

$$\operatorname{tang} A = \frac{d \sin E - c \sin (D + E)}{e - d \cos E + c \cos (D + E)},$$

et comme alors l'angle D devient C, l'angle E devient D, e devient d, d se change en c, et c en b, on a

$$\operatorname{tang} A = \frac{c \sin D - b \sin (C + D)}{d - c \cos D + b \cos (C + D)}.$$

Problème LXXXXVII. *Evaluer la surface d'un polygone; connaissant l'un de ses côtés et les angles aux deux extrémités de ce côté entre ce même côté et les autres sommets du polygone.*

Il n'est pas toujours possible de mesurer tous les côtés et tous les angles d'un polygone ; souvent même on est réduit à prendre pour base unique un de ses côtés, et à déterminer les sommets des angles par des intersections. Nous allons montrer comment on peut, dans ce cas, évaluer la surface.

Fig. 240. Soient ABCDE le polygone proposé, $AB = a$ la base mesurée : soient en outre les angles observés au point A

$$EAB = \varepsilon, \quad DAB = \delta, \quad CAB = \gamma,$$

les angles observés au point B,

$$\text{EBA} = \varepsilon', \quad \text{DBA} = \delta', \quad \text{CBA} = \gamma',$$

on a

$$\text{surf EAD} = \frac{\text{AE} \times \text{AD}}{2} \sin \text{EAD} ;$$

mais le triangle AEB donne

$$\sin(\varepsilon + \varepsilon') : a :: \sin \varepsilon' : \text{AE} = \frac{a \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')} ;$$

le triangle DAB donne

$$\sin(\delta + \delta') : a :: \sin \delta' : \text{AD} = \frac{a \sin \delta'}{\sin(\delta + \delta')},$$

donc

$$\text{surf. EAD} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \varepsilon' \sin \delta'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \sin(\varepsilon - \delta),$$

on trouverait

$$\text{surf. DAC} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \delta' \sin \gamma'}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \sin(\delta - \gamma)$$

$$\text{surf. CAD} = \frac{a^2}{2} \frac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')}.$$

Par conséquent l'aire cherchée est

$$\text{surf. AEDCB} = \tfrac{1}{2} a^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin \varepsilon' \sin \delta' \sin(\varepsilon - \delta)}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \sin(\delta + \delta')} \\ + & \frac{\sin \delta' \sin \gamma' \sin(\delta - \gamma)}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \\ + & \frac{\sin \gamma \sin \gamma'}{\sin(\gamma + \gamma')}. \end{aligned} \right.$$

Prenant le point B pour sommet commun des triangles qui composent la surface du polygone, on parvient à

$$\text{surf. ABCDE} = \tfrac{1}{2} a^2 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin \gamma \sin \delta \sin(\gamma' - \delta')}{\sin(\gamma + \gamma') \sin(\delta + \delta')} \\ + & \frac{\sin \delta \sin \gamma \sin(\delta' - \gamma')}{\sin(\delta + \delta') \sin(\gamma + \gamma')} \\ + & \frac{\sin \varepsilon \sin \varepsilon'}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')}. \end{aligned} \right.$$

Théorème LXXI. *L'aire de l'une des faces d'un polyèdre quelconque, est égale à la somme des aires de toutes les autres faces multipliées chacune par le cosinus de l'angle qu'elle forme avec le plan de projection.*

Soient a, b, c, d..... les aires des faces d'un polyèdre quelconque; si l'on prend successivement chacune de ces faces pour plan de projection, on aura (Théor. XXXXIV, pag. 187), en supposant d'abord toutes les faces projetées sur a

$$a = b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d) \ldots (1),$$

en supposant toutes les faces projetées sur b,

$$b = a\cos(b, a) + c\cos(b, c) + d\cos(b, d) \ldots (2);$$

en supposant toutes les faces projetées sur c,

$$c = a\cos(c, a) + b\cos(c, b) + d\cos(c, d) \ldots (3),$$

etc.

Les notations (a, b), (a, c), etc. rappellent les angles entre les faces a et b, a et c, etc.

Théorème LXXII. *Si l'on nomme* base d'un polyèdre, *l'une quelconque de ses faces, le produit d'une face par le sinus de son inclinaison sur la base, est égal à la somme des produits de chacune des autres faces par le sinus de son inclinaison sur la base, et par le cosinus de l'angle formé par les communes sections du plan de la base avec la première face et avec celle des faces restantes, qui est prise comme facteur.*

Multipliant successivement les deux membres de l'équation (1) du théorème précédent par les coefficiens de a dans les suivantes; et ajoutant chacun de ces produits aux deux membres de l'égalité entre la somme des équations (2), (3), etc.,

on trouvera pour résultats indépendans de la face a,

$$\left.\begin{array}{l} b \sin^2(a,b) = c\{\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c)\} \\ \qquad + d\{\cos(b,d) + \cos(a,b)\cos(a,d)\} \end{array}\right\}(A)$$

etc.

$$\left.\begin{array}{l} c \sin^2(a,c) = b\{\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c)\} \\ \qquad + d\{\cos(c,d) + \cos(a,c)\cos(a,d)\} \end{array}\right\}\ldots\ldots(B)$$

etc.

et ainsi de suite.

Maintenant si l'on désigne par $\beta\alpha\gamma$ l'angle formé par les deux communes intersections du plan de la base a avec chacune des faces b et c, et qu'on adopte une dénomination analogue relativement aux autres faces, on aura, à cause de

$$\cos(b,c) + \cos(a,b)\cos(a,c) = \sin(a,b)\sin(a,c)\cos(\beta\alpha\gamma)$$

(Réc., pag. 291, form. 7), les transformations suivantes des équations (A), (B), etc.,

$$b\sin(a,b) = c\sin(a,c)\cos(\beta\alpha\gamma) + d\sin(a,d)\cos(\beta\alpha\delta) + \text{etc.}$$
$$c\sin(a,c) = b\sin(a,b)\cos(\beta\alpha\gamma) + d\sin(a,d)\cos(\gamma\alpha\delta) + \text{etc.}$$

etc.

ce qui est l'énoncé du théorème.

Théorème LXXIII. *Dans tout polyèdre, le quarré de la moitié de la surface est égal à la somme des produits de toutes les faces multipliées deux à deux, et par le quarré du cosinus de leur demi-inclinaison.*

Si après avoir multiplié chacune des équations du théorème LXX par son premier membre, on ajoute ensemble toutes ces équations, et qu'aux deux membres de l'équation résultante on ajoute encore le double produit de toutes les faces prises deux à deux, on aura, à cause de

$$\frac{1 + \cos(a,b)}{2} = \cos^2 \tfrac{1}{2}(a,b), \text{ etc.},$$

l'équation suivante

$$\left(\frac{a+b+c+d+\text{etc.}}{2}\right)^2 = ab\cos^2\tfrac{1}{2}(a,b) + ac\cos^2\tfrac{1}{2}(a,c) + ad\cos^2\tfrac{1}{2}(a,d)\text{, etc.,}$$

qui est la traduction analytique de l'énoncé du théorème.

Théorème LXXIV. *La somme des quarrés de toutes les faces d'un polyèdre, est égale au double de la somme des produits de toutes ces faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

En effet, si on multiplie les deux membres des équations du théorème LXX respectivement par a, b, c, d......., et qu'on ajoute tous ces produits, on trouvera la propriété énoncée, savoir :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots\ldots$$
$$=2ab\cos(a,b)+2ac\cos(a,c)+2ad\cos(a,d)+2bc\cos(b,c).$$

Remarque.

Ainsi les polyèdres jouissent, par rapport à leurs faces et aux angles qu'elles comprennent, de la même propriété que les polynomes à l'égard de leurs côtés et des angles entre ces côtés (Rec. de Théor. et Prob., Théor. LXVII, LXVIII et LXIX). Cette remarque s'étend au théorème suivant.

Théorème LXXV. *Dans tout polyèdre, le quarré d'une face est égal à la somme des quarrés des autres faces, moins deux fois la somme des produits de toutes ces autres faces multipliées deux à deux, et par le cosinus de l'angle dièdre qu'elles comprennent.*

Opérant comme on l'a fait (pag. 297 et 298) sur les équations du théorème LXX, on a sur-le-champ

$$a^2=b^2+c^2+d^2\ldots\ldots-2\{bc\cos(b,c)+bd\cos(b,d)+\text{etc.}\}.$$

Corollaire. Ainsi, pour la pyramide triangulaire, on trouve

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2\{bc\cos(b,c) + bd\cos(b,d) + cd\cos(c,d)\}.$$

Mais lorsqu'un des angles trièdres est formé de trois angles droits ; par exemple, lorsque les faces b, c, d sont des triangles rectangles, les angles dièdres (b,c), (b,d), (c,d) sont droits, et l'expression précédente se réduit à

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2.$$

Ainsi, *dans un tétraèdre rectangle, le quarré de la face opposé à l'angle trirectangle, est égal à la somme des quarrés des trois autres faces*, propriété démontrée autrement (Rec. de Théor. et Prob., Théor. XXXXII).

Sur le levé des Plans.

Former *la carte* d'un pays de peu d'étendue, c'est construire sur le papier une figure semblable à celle du terrain dont les différentes parties sont supposées projetées sur un plan horizontal par des perpendiculaires abaissées de tous les objets sur ce plan.

On nomme *carte topographique* ou *plan*, le dessin qui représente tous les détails d'une contrée ou d'un domaine.

Quant aux cartes embrassant beaucoup d'étendue de pays, et n'offrant que les objets les plus remarquables, on les appelle *cartes géographiques*.

Pour déterminer les positions respectives des principaux points d'un plan, il faut considérer ces points comme les sommets des angles de triangles qui, par leur enchaînement, forment sur le terrain un *réseau* continu dans tous les sens. Ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses, lorsqu'ils sont les plus grands possibles, qu'ils approchent le plus de la forme équilatérale, et qu'ils sont liés au moins à une ligne princi-

pale ou *base*. Lorsque cette base et les trois angles de chaque triangle sont mesurés, on a tous les élémens nécessaires pour calculer de proche en proche les distances entre les objets, ce qui constitue le *canevas* du plan. C'est en cela que consistent les *opérations géodésiques*.

Nous ne nous arrêterons pas à décrire les deux instrumens employés à la mesure des angles, savoir, le *graphomètre* qui n'est plus guères en usage que parmi les arpenteurs, et le *cercle répétiteur* de *Borda*, instrument précieux employé depuis quelques années. C'est principalement dans les grandes opérations géodésiques, comme celles qui ont pour objet la mesure d'un arc du méridien, ou le levé trigonométrique d'un grand État, que le cercle répétiteur est indispensable. (Voyez, sur ce sujet, le *Traité de Géodésie* de *Puissant*, et *la base du Système métrique*, par *M. Delambre*.)

Lorsqu'on lève la carte d'un pays, on n'est pas toujours le maître de placer des signaux commodes pour l'observation, tels que ceux qui sont formés de pyramides creuses, etc. Il faut souvent profiter des clochers, des tours ou d'autres objets élevés qui sont les sommets des angles des triangles du réseau. De là la nécessité fréquente d'observer à quelque distance de l'axe du signal, qui est le centre de la station, centre qui peut être visible et accessible, où invisible. Il faut alors réduire les angles observés au centre de la station, ainsi qu'il est enseigné dans les ouvrages cités ci-dessus.

Les angles ainsi réduits au centre de la station, se réduisent ensuite à l'horizon, quand les angles de position ne sont pas situés dans le plan horizontal que l'on imagine passer par le centre de l'instrument : la projection sur ce plan de l'angle incliné, se nomme *reduction à l'horizon*. La raison de cette réduction est que dans le système de projection adopté pour représenter les positions respectives des objets, on ne considère que des distances horizontales, et qu'ainsi il est nécessaire, pour calculer sous ce point de vue les côtés des triangles,

de réduire leurs angles au plan même de ces distances. Voyez le *Traité de Géodésie* où se trouvent des Tables qui abrègent considérablement ces réductions.

Lorsque les angles des triangles de la grande chaîne sont réduits à l'horizon, on ajoute ceux d'un même triangle, et la somme que l'on obtient surpasse nécessairement deux angles droits, parce que les angles ajoutés sont ceux d'un triangle sphérique, dont les côtés très-peu courbes, à la vérité, représentent les distances curvilignes comprises entre les verticales des stations (*). Ensuite l'excès dont il s'agit, et qui est en même temps affecté de l'erreur de l'observation, est réparti indistinctement par tiers sur les trois angles du triangle. Quand ces angles sont ainsi réduits à ne valoir que deux angles droits, on procède au calcul des distances en les considérant seulement comme des côtés de triangles rectilignes : ils sont néanmoins des arcs de grand cercle de la sphère dont le rayon est le même que celui de la *ligne géodésique* ou de la base réduite préalablement à un niveau constant, c'est-à-dire à un arc de grand cercle.

Au lieu de ramener par cette voie la résolution des triangles sphériques à celle des triangles rectilignes, on peut ramener les angles horizontaux aux angles entre les cordes qui soutendent les arcs entre les stations : alors les triangles à calculer sont réellement des triangles rectilignes; cette réduction est pratiquée par quelques Géomètres, et notamment par M. *Delambre*. Après avoir ainsi réduit tous les angles horizontaux aux angles entre les cordes, on résout les triangles de la chaîne à l'aide de la base mesurée, et de ce principe de trigonométrie rectiligne que dans les triangles les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés.

Puisque les triangles dont le canevas d'une carte est formé,

(*) La somme des angles de tout triangle sphérique, est moindre que six et plus grande que deux angles droits (Géom., Liv. VII, Prop. XIX).

sont liés les uns aux autres, il s'ensuit qu'il suffit, à la rigueur, de connaître ou de mesurer un seul de leurs côtés, pour pouvoir calculer toutes les distances entre les signaux ou les sommets des angles. La mesure de ce côté ou de cette base, est une des opérations les plus délicates et les plus importantes de la Géodésie. Il est essentiel qu'une base ne soit pas trop petite; qu'elle soit établie sur un terrain de niveau, ou plutôt que la ligne géodésique qui la représente, soit droite, et que sa longueur soit réduite à l'horizon, ou au niveau de la mer. Ceux qui voudraient connaître les véritables procédés à employer pour la mesure d'une base, dans les grandes opérations géodésiques, les trouveront développés dans le grand ouvrage de M. *Delambre*, et dans le *Traité de Géodésie*.

Un plan est *orienté*, lorsque l'on connaît l'angle qu'une de ses lignes principales fait avec le méridien terrestre, parce qu'alors on peut assigner la place de chaque objet à l'égard des quatre points cardinaux. Cet angle que l'on nomme *azimuth*, donne la direction des côtés du triangle par rapport à la méridienne terrestre.

Lorsqu'on ne s'attache pas à une exactitude rigoureuse, on peut former le canevas d'une carte de la manière suivante :

Fig. 241. Soient A, B, C, D, F, G, H, K, L les points fondamentaux d'un plan, points qui sont représentés par des signaux naturels ou artificiels que l'on établit convenablement, en faisant la reconnaissance du pays. On dessinera à vue tous les objets sur un *croquis* ou *brouillon*, sur lequel on doit noter les différentes mesures que l'on prendra dans le cours des opérations, et l'on y tracera la base AB, des extrémités de laquelle on aperçoit plusieurs des points CDF....., ayant soin, comme nous l'avons déjà observé, que cette base ne soit pas trop petite par rapport à la distance de ses extrémités aux points visibles. Ensuite on mesurera au point A les angles CAB, DAB, HAB, FAB, GAB. Ces observations étant faites à la première station A, on ira en faire de pareilles à la seconde station B,

c'est-à-dire qu'on relèvera les angles CBA, DBA, HBA, FBA, GBA; enfin, on mesurera la base AB. On voit que, de cette manière, on connaîtra dans chacun des triangles ACB, ADB... un côté et les angles adjacens. On calculera donc facilement les distances AC, CB, AD, DB....., à l'aide desquelles, et de la base AB, on déterminera sur le *mis au net*, et d'après l'échelle adoptée, les positions respectives des points C, D, F, G, H, soit par la méthode si connue des intersections, soit par le moyen d'un *rapporteur* qu'on trouve dans tous les étuis de mathématiques.

Il reste à placer sur la carte les points K, L qui n'ont pu être aperçus du point *A*, mais qui peuvent l'être des points B et H. A cet effet, on considérera BH comme une nouvelle base qui servira pour lier ces nouveaux points au premier système, en observant les angles KHB, LHB, KBH, LBH, parce qu'on connaîtra de même dans les triangles KHB, LHB deux angles et un côté. Il ne sera pas nécessaire de mesurer la distance BH, puisqu'elle est donnée par la solution du triangle AHB.

Mais lorsqu'on fait dépendre la position d'un point de celles des autres points déjà placés, il arrive qu'une erreur déjà commise dans la détermination graphique de l'un d'eux, influe sur la position de tous les autres points subséquens. Mais en les fixant à l'aide de leurs distances à deux droites fixes, par exemple à la méridienne du lieu de la carte et à sa perpendiculaire (*Astr. élém.* de *Biot*, n° 237), on rend leurs positions indépendantes les unes des autres. Cette méthode exige alors que l'on calcule les distances dont il s'agit au moyen des triangles et de l'*azimuth* d'un des côtés de la chaîne.

Pour fixer les idées à ce sujet, soit AX la méridienne du lieu A, et AY la perpendiculaire, et supposons que les triangles AMM′, AmM′, etc. fassent partie d'un réseau trigonométrique : on demande les coordonnées des points *m*, M, M′, etc., c'est-à-dire les distances aux droites AX et AY Fig. 242.

des points m, M′, M″, etc., lesquelles sont Ap et pm, AP et PM, AP′ et P′M′, etc. Si l'angle mAP est l'azimuth observé, il est clair que tous les triangles seront *orientés*, et que l'on connaîtra aisément les autres azimuths MAP, M′AP′, etc., puisque les angles MAM′, M′Am sont connus. Ainsi en menant par les sommets de tous les triangles de la chaîne des parallèles à la méridienne et à sa perpendiculaire, les côtés du triangle du réseau, seront les hypoténuses des triangles rectangles que l'on sait résoudre. Par exemple, la résolution des triangles rectangles APM, AP′M′ donnera les valeurs des coordonnées ou des distances AP et PM, AP′ et P′M′ des points M et M′. La résolution du triangle M′M″b fera connaître les distances bM″, bM′, et comme les distances du point M″ sont AP″, P″M″, on aura

$$AP'' = AP' + bM', \quad P''M'' = P'M - bM''.$$

Pareillement, lorsqu'on aura calculé les distances dM″, dM‴, on aura

$$AP''' = AP'' + dM''; \quad P'''M''' = P''M'' + dM''',$$

et ainsi du reste.

C'est de cette manière que les distances des lieux de la France à la méridienne et à la perpendiculaire qui passent par l'Observatoire de Paris, ont été calculées pour former la carte de cet Empire.

Après avoir ainsi formé le canevas d'un plan, il reste à figurer tous les objets qui doivent couvrir la surface, comme les masses de maisons, les rivières, les ruisseaux, les chemins, les limites des différentes cultures, en un mot, toutes les propriétés particulières. En général, il y a deux manières de lever les détails. La première est de tracer autour de l'espace à figurer, un polygone quelconque du plus grand nombre possible de côtés, puis d'abaisser des perpendiculaires de toutes

les sinuosités du terrain sur ces côtés pris pour bases. La seconde qui facilite singulièrement l'évaluation des surfaces agraires, est d'abaisser des perpendiculaires de tous les angles du périmètre des masses à lever, sur des lignes directrices ou bases que l'on rattache aux côtés des triangles du canevas. Il est de règle, en topographie, de projeter toutes les surfaces sur un plan horizontal par des perpendiculaires à ce plan, ou de faire la *projection orthogonale* du terrain : c'est ce que les arpenteurs nomment *méthode de cultellation*; préférable à celle que l'on nomme *méthode de développement*. En effet, il serait impossible de faire raccorder les parties d'un plan dont les unes auraient été mesurées dans le sens horizontal et les autres suivant la pente du terrain ; d'ailleurs il est reconnu que le produit de la culture n'est pas toujours proportionnel à la surface : en effet un champ placé sur un coteau ne produit pas autant qu'un champ de même superficie et de même qualité, situé en plaine. Ainsi, pour faire légalement le partage des terres, il faut, au lieu de les diviser en parties égales, si telle est la condition, les diviser en parties qui soient entre elles en raison inverse de leurs produits.

Après avoir formé les détails d'un plan par l'une des méthodes exposées précédemment, on procède aux calculs des superficies des diverses propriétés particulières, et il est un moyen de s'assurer de leur exactitude, c'est d'évaluer en masse l'étendue superficielle de la totalité du plan, opération qu'il est aisé d'effectuer, puisque par le mode de construction du canevas trigonométrique, il ne s'agit que d'évaluer les aires des triangles et des trapèzes rectangles dont le canevas est composé.

Nous proposerons pour exemple, de déterminer l'aire du polynome quelconque ABC, dont on connaît les distances des sommets des angles à la méridienne AX et à la perpendiculaire AY.

Fig. 243. Soient

$Ak = 11^m,6$; $Kk = 8,4$; $Bb = 13$; $Ab = 21,45$; $Cc = 8$; $bc = 15$;
$Dd = 19,4$; $cd = 7$; $df = 6,4$; $Hi = 5$; $Ki = 10$; $lk = 18,4$;
$Gg = 8,2$; $kg = 26,85$; $Ff = 14$; $gf = 11,4$; $EX = 4$;
$fX = 5$; $NX = 3$,

on aura.

				m.c
aire (AK*k*) =	(11,6)	(4,2)	=	48,72
aire (AB*b*) =	(21,45)	(6,5)	=	139,42
aire (BC*cb*) =	(21)	(7,5)	=	157,50
aire (CD*dc*) =	(13,7)	(7)	=	95,90
aire (D*df*) =	(19,4)	(3,2)	=	62,08
aire (KH*l*) =	(5)	(5)	=	25,00
aire (*kl*G*g*) =	(13,3)	(26,85)	=	357,10
aire (GF*fg*) =	(11,1)	(11,4)	=	126,54
aire (FEX*f*) =	(9)	(5)	=	45,00
		Somme	=	m.c. 1057,26
aire (ENX) soustractive	= 3×2		=	6,00
aire effective du polygone			=	1051,26

Si le terrain à mesurer était terminé par une ligne courbe, on abaisserait sur la base AX menée intérieurement, autant de perpendiculaires qu'il serait nécessaire pour pouvoir considérer, sans erreur sensible, le périmètre comme un assemblage de petites lignes droites, et le calcul de la superficie se simplifierait beaucoup, en rendant toutes ces perpendiculaires équidistantes. Car, dans ce cas, *l'aire cherchée est égale au produit de la distance commune de ces perpendiculaires par la somme faite de la demi-somme des perpendiculaires extrêmes, et de la somme des perpendiculaires intermédiaires.*

Si on n'a fait que mesurer les angles et les côtés du poly-

gone ABCDE, dans le cas où on aurait une faible erreur en Fig.244.
plus ou en moins sur la somme des cinq angles du pentagone, donnée par l'observation, on diminuerait ou on augmenterait chaque angle de cette erreur, divisée par le nombre des côtés, en supposant toutefois que les angles aient été observés dans le même plan et aux sommets A, B, C, D, E. Il est aussi nécessaire de vérifier sur le terrain, si les longueurs des côtés sont exactes. A cet effet, on inscrit le polygone dans le rectangle *xyzt*, dont on détermine les quatre côtés dans les triangles rectangles BC*x*, DC*y*, ED*z*, EA*t*, dans chacun desquels on connaît l'hypoténuse et les angles, et on reconnaît qu'il ne s'est glissé aucune erreur dans la mesure des côtés, lorsque les côtés opposés des rectangles sont égaux. Cette vérification faite, de l'aire du rectangle on retranchera la somme des aires des quatre triangles BC*x*, CD*y*, DE*z*; AE*t*, et la différence sera l'aire du polynome.

Ce que nous venons de dire sur le levé des plans et sur le calcul des surfaces, nous paraît suffisant dans un ouvrage de la nature de celui-ci : les *Traités de Géodésie, de Topographie* de *Puissant*, et l'ouvrage de M. *Pommiers*, *à l'usage des ingénieurs du Cadastre*, forment une doctrine complète à ce sujet, et réunissent d'ailleurs plusieurs théories importantes développées en faveur des ingénieurs qui exécutent de grands travaux géodésiques.

Problème LXXXXVIII. *Soit un point D élevé, qu'on puisse voir de trois autres points donnés E, G, F, et qu'en E, G,* Fig.245.
F on ait observé l'angle que fait le rayon visuel mené au point D avec la verticale ; trouver la projection du point D sur le plan horizontal et sa hauteur au-dessus de ce plan.

On choisira pour plan horizontal le plan PQ qui passe par l'un des points donnés F, et puisque les deux autres points G et E sont donnés, on en aura les projections G′, E′ sur ce plan.

ME, LF, IG étant les trois verticales des points E, F, G,

et ED, FD, GD les rayons visuels menés de ces points au point D, on connaît les angles DEM, DFL, DGI.

Concevons maintenant que le rayon visuel ED tourne autour de la verticale EM, en faisant constamment avec elle le même angle; il engendrera un cône droit, sur la surface duquel le point D sera nécessairement placé. Il se trouvera aussi sur la surface de chacun des deux autres cônes droits engendrés par les rayons visuels FD, GD tournant sous les angles LFD, IGD autour des verticales FL, GI. Le point D sera donc placé à l'intersection de ces trois cônes.

Pour obtenir cette intersection en projection horizontale, on imaginera des plans parallèles au plan horizontal; les sections de chacun des cônes par ces plans, seront des cercles qui auront pour rayons les perpendiculaires abaissées des points où chaque plan coupant rencontrera les rayons visuels, sur l'axe de chacun des cônes; les projections horizontales de trois cercles déterminés par un plan coupant, seront visiblement des cercles égaux à ceux de l'espace. Si donc on décrit des centres E′, F′ et G′ trois cercles qui se coupent en un point, ce point H sera la projection horizontale du point D. Au moyen du rayon FH, on trouvera facilement la hauteur HD, en menant par H une verticale jusqu'à la rencontre de l'un des rayons visuels.

Problème LXXXXIX. *Un observateur placé dans un ballon supposé fixe, veut déterminer sa position.*

A cet effet, il mesurera les angles que font entre eux trois rayons visuels menés à trois points connus : ainsi les angles
Fig. 245. EDF, GDF, GDE seront connus, et nous supposerons qu'on ait pris pour plan horizontal celui des trois points G, F, E; on a donc alors la base et les angles entre les arêtes d'une pyramide, et il s'agit de trouver la projection horizontale du sommet de cette pyramide, ainsi que sa hauteur.

Soit EGF la base de la pyramide : on décrira sur les côtés

EF, EG, GF des segmens EKF, ERG, GOF capables des angles observés entre les arêtes DE et DF, DE et DG, DF et DG. Le segment EKF, par exemple, tournant autour de EF engendrera un corps dont tous les points de la surface seront tels, que si de chacun d'eux on mène deux droites aux points E et F, ces droites feront un angle égal à l'angle observé : le point cherché D sera donc sur cette surface ; il sera pareillement sur deux autres surfaces de révolution, engendrées par les segmens ERG, GOF tournant autour des axes EG, GF. Fig. 246.

Il s'agit donc de trouver la projection horizontale d'un point qui appartienne à ces trois surfaces.

A cet effet, nous résoudrons le problème suivant.

Problème C. *Tracer la projection horizontale de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont dans un même plan.*

SK et SI sont deux axes autour desquels les deux courbes EX, FY sont assujéties à tourner ; ces courbes, dans ce mouvement, engendrent deux surfaces de révolution qui se coupent suivant une certaine courbe dont on demande la projection horizontale, ou la projection dans le plan des deux axes de révolution. Fig 247.

Du point S comme centre, avec un rayon arbitraire SI, décrivons un arc INMK ; cet arc coupera les génératrices EX, FY en deux points N et M : dans le mouvement autour de l'axe SK, le point N décrit une circonférence dont le rayon est la perpendiculaire NH à SK, et dont le centre est en H, circonférence qui est sur la surface de la sphère engendrée par la révolution autour de SK de la circonférence dont l'arc KMNI fait partie. Cette circonférence du rayon NH est donc la commune section de la sphère et de la surface de révolution dont EX est la génératrice. De même la circonférence du rayon MG, perpendiculaire sur SI, est la

commune section de la surface de révolution dont FY est la génératrice, et de la même sphère considérée comme engendrée par la révolution autour de SI de la circonférence dont l'arc INMK fait partie. Donc l'intersection des deux circonférences des rayons NH et MG est un des points de l'intersection des deux surfaces de révolution. Or les cercles des rayons NH et MI sont verticaux, et ils coupent le plan horizontal suivant NH et MI; donc l'intersection L de ces traces est un point de la projection horizontale de la courbe d'intersection des deux surfaces.

Ainsi, dans le problème précédent, on déterminera les projections horizontales des trois surfaces de révolution, considérées deux à deux, et le point dans lequel ces trois courbes se couperont, sera la projection horizontale cherchée du sommet de la pyramide. Fig. 246. Connaissant cette projection L, on mènera la perpendiculaire LMN à EF, ensorte que LM sera le côté de l'angle droit, et MN l'hypoténuse d'un triangle rectangle qu'on construira, et dont l'autre côté de l'angle droit sera la hauteur cherchée de la pyramide.

De la courbe trisectrice ou de la courbe qui donne la trisection de l'angle.

Théorème LXXVI. *Soit un triangle isoscèle ABC, dans lequel on ait AB=BC, et l'angle B plus petit que le tiers de la demi-circonférence : si du sommet A, avec un rayon =AC, on décrit un arc qui coupe CB en E, et qu'on joigne AE, le triangle CAE sera semblable au triangle ABC.* Fig.248.

Cette proposition sera facile à démontrer : nous nous bornerons à observer que lorsque l'angle B est plus grand que le tiers de la demi-circonférence, l'arc décrit du point A comme centre, avec AC pour rayon, ne peut plus rencontrer que le prolongement de CB, puisqu'alors le côté AC excède chacun des côtés égaux BC, BA.

Théorème LXXVII. *Dans le triangle isoscèle BAC, si du sommet B de l'angle intercepté entre les côtés égaux, comme centre, avec un rayon BE plus petit que l'un des côtés égaux, et plus grand que la perpendiculaire BO, l'on décrit un arc de cercle ENIR, qui coupera nécessairement CA en deux points N et I ; je dis que les longueurs AI, CN seront égales.* Fig.249.

Menons ER ; on aura BR : BA :: BE : BC ; donc ER est parallèle à CA ; donc EN = RI, et les deux triangles IAB, NCB sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux.

Théorème LXXVIII. *Soient les deux triangles isoscèles semblables ABC, CAE, qui sont ceux de la figure 248, si du sommet B, comme centre, avec BA comme rayon, on décrit la demi-circonférence ACOR, et que l'on prolonge le côté AE jusqu'à la rencontre en O de cette demi-circonférence, l'arc ACO sera triple de AC.* Fig.250.

En effet l'arc AC est la mesure de l'angle au centre ABC ; la moitié de l'arc CO est la mesure de l'angle CAE = ABC :

donc l'arc CO est double de l'arc AC; donc l'arc ACO est triple de l'arc AC.

Lorsque l'arc en B est le tiers de la demi-circonférence, le triangle ABC est équilatéral, et le triangle CAE qui l'est aussi, se confond avec le premier; l'arc COR est double de AC; conséquemment l'arc ACOR est triple de l'arc AC soutendu par le côté de l'hexagone, ce qu'on savait déjà.

Ainsi, pour avoir un arc ACO triple de AC, on cherchera le centre B de cet arc, et après avoir joint BC, du point A comme centre, avec AC comme rayon, on décrira l'arc CE, et prolongeant AE jusqu'à la rencontre en O de la circonférence, on aura l'arc ACO = 3 arc AC.

Théorème LXXIX. *Si du point A comme centre, avec*
Fig. 250. *AB = BC comme rayon, on décrit la demi-circonférence BIDM, et si l'on prolonge BC jusqu'en P, on aura PE = BC.*

Le triangle BAP est isoscèle, et sa base BP est coupée en C et E par un arc decrit de A comme centre, avec AC comme rayon : donc PC = BE; donc aussi PE = BC.

Ainsi, au lieu de déterminer le point E, comme nous l'avons fait plus haut, on prolongera BC jusqu'en P; puis à partir du point P, prenant sur PB une partie PE égale à BC, on aura E qui détermine la corde AEO de l'arc triple de AC.

L'angle B, d'abord moindre que le tiers de la demi-circonférence, venant à augmenter jusqu'à ce tiers, le prolongement CP diminue, P s'approche de C, et enfin les deux points P et C se confondent dans l'intersection I des deux circonférences; ensorte que comme on prend toujours PE = BC, le point E coincide alors avec B, et le triple de AC ou de AI est la demi-circonférence.

Nous étendrons cette construction jusqu'à l'arc égal aux deux tiers de la demi-circonférence. Supposons l'angle B entre le tiers et les deux tiers de la demi-circonférence, et soit l'arc AC' égal au quart de la circonférence : tirons la corde AC

de l'arc AC′ qui mesure cet angle, la circonférence AC′RO′ étant toujours décrite de B comme centre, avec BA = BC′ comme rayon, l'arc décrit de A comme centre, avec AC′ comme rayon, coupera le prolongement de C′B en E′ : si par les points A et E′, on mène la ligne AE′ prolongée jusqu'à la rencontre de la circonférence en O′ ou E′, l'arc AC′RO′ égal aux trois quarts de la circonférence, sera triple de l'arc AC′, qui en est le quart. C'est ce qu'il sera facile de prouver, en observant que les triangles C′AB, C′AE′, toujours isoscèles, ont un angle commun en C′. Fig. 251.

Il est visible que l'angle ABC″ étant les deux tiers de la demi-circonférence, la ligne AE″ devient tangente en A; et, en effet, l'arc triple de AC″ est alors la circonférence entière. Fig. 252.

Théorème LXXX. *Si du point A comme centre, avec le rayon AB = BC, on décrit la circonférence BIDMB qui coupe aux points P et B, la base CE du triangle isoscèle CAE, on a PE = BC.* Fig. 251 et 252.

La démonstration de cet énoncé qui n'est que le précédent généralisé, est facile, et la proposition est vraie, quel que soit l'angle B.

Dans les augmentations de B jusqu'à l'angle droit, c'est toujours le côté BC (fig. 251) qui est coupé par la circonférence BIDMB. Lorsque B est droit (fig. 251), auquel cas BC′ est une tangente en B à la circonférence BIDMB, le point P ou P′ tombe en B, et il faut sur le prolongement de C′B ou de C′P′, porter, à partir de P′ ou de B, une longueur égale à BC′ ou P′C′ : alors on a l'arc AC′RE′ égal aux trois quarts de la circonférence, lequel est bien le triple de la mesure d'un droit; lorsque B excède un droit, cette intersection est en P sur le prolongement de BC (fig. 251) : il faut toujours porter PE = BC en sens contraire de BC. Le lieu de tous ces points E (fig. 251 et 252) est une courbe que nous nommerons *trisectrice*, parce qu'elle sert à diviser en trois parties égales un angle ou un arc donné.

Nous résumerons la génération de la courbe trisectrice, et nous compléterons sa description, en nous plaçant dans la division sexagésimale du cercle.

Qu'on imagine du point A des cordes à tous les points de la circonférence dont le centre est en B, si du même point A, avec des ouvertures de compas égales aux cordes des arcs tiers, on coupe celles des arcs triples, la suite de ces intersections sera la courbe trisectrice AKBEFGHBIA. Fig.253.

Ainsi, par exemple, si l'arc tiers est de 20°, auquel cas l'arc triple est de 60°, le point K sera l'intersection de la corde de 60° par celle de 20°.

Mais lorsqu'on a employé toutes les cordes des arcs tiers depuis 0 jusqu'à 120° pour couper celles des arcs triples, on a fait en arcs triples un tour de circonférence, et, en même temps, on a tracé la portion ANBDE de la courbe en question.

Si donc on voulait employer les cordes d'arcs tiers, celles des arcs qui excèdent 120°, ou en d'autres termes, si on voulait continuer la trisectrice au-delà du point E, le problème de la trisection s'étendrait, ainsi que l'exige l'analyse, à des arcs plus grands que la circonférence.

Ainsi pour des cordes, à partir de celle de 120° jusqu'à celle de 180°, considérées comme cordes d'arcs tiers, les intersections avec celles des arcs triples, auront lieu depuis E jusqu'en F; et il faut bien observer que si, par exemple, l'arc tiers est de 140°, auquel cas l'arc triple est de 420°, ou de 360°+60°, l'intersection sera sur le prolongement de la corde de 60°, c'est-à-dire entre E et F en K′.

On n'a encore employé que les cordes des arcs tiers de 0° à 180°, et comme la corde de ce dernier arc est un *maximum*, le point F est le plus éloigné du point A, et la distance AF = 2, en supposant 1 le rayon du cercle; pour ce point, l'arc triple est d'une circonférence et demie.

Pour construire le point de la trisectrice, qui correspond

par exemple, à l'arc de 260°, considéré comme tiers, on observera que, comme l'arc triple est de deux circonférences plus 60°, dont la corde est encore celle de 60°, il faudra couper cette corde prolongée par un arc décrit de A comme centre, avec la corde de 260° qui n'est que celle de 100°, et alors on aura le point K″.

Ainsi lorsqu'on emploie les cordes des arcs de 180° à 360°, considérés comme arcs tiers, on continue la trisectrice, et on en décrit la portion FGBA.

On a donc remarqué que la corde d'un arc triple fait trouver trois arcs tiers différens; car celle de 60° rencontrant la trisectrice dans les points K, K′ et K″, si de A comme centre, avec des ouvertures de compas AK, AK′, AK″ comme rayons, on décrit des arcs de cercle jusqu'à la circonférence dont le centre est B, on aura les points m, m', m'', tels que les arcs Am, Amm', A$mm'm''$ seront les tiers de 60°, d'une circonférence plus 60°, de deux circonférences plus 60°.

Ainsi cette trisectrice, pour être complète, c'est-à-dire pour résoudre le problème avec toute l'étendue qu'il comporte et que nous donne l'analyse, doit répondre à trois tours de circonférence, ou être le lieu des intersections des cordes des arcs de 0° à trois circonférences, pris comme arcs triples, par celles des arcs tiers, ou de 0° à 360°.

On observera enfin que, pour les arcs triples de 0° à 180°, les intersections sont au-dessus de BF, et qu'elles forment la portion ANB; que de 180° à 360°, elles sont au-dessous de BF, et qu'elles donnent BDE; que de 360° à 360° + 180°, elles forment la portion EF; que de 360° + 180° à deux fois 360°, elles sont au-dessus de BF, et qu'elles donnent la portion FG; que de 2 fois 360° à 2 fois 360 + 180°, elles sont encore au-dessus de BF, et qu'elles prolongent la courbe de G en B; enfin que de 2 fois 360° + 180° à 3 fois 360°, elles complètent la courbe, en composant la portion BIA.

Si l'on pliait la figure suivant l'axe BF, les portions inférieures de la courbe s'appliqueraient exactement, point pour point, sur les portions supérieures : cette symétrie résulte évidemment de la construction.

Mais des théorèmes LXXIX et LXXX, résulte cette seconde construction de la courbe : qu'on décrive une autre circonférence de A comme centre, avec AB pour rayon ; qu'on imagine de B des cordes à tous les points de cette seconde circonférence, et que, de l'extrémité de chacune d'elles, de R, par exemple, on porte RL = RK = rayon du cercle, les extrémités L et K seront à la trisectrice.

Ainsi les distances RL et RK sont partout égales entre elles et au rayon du cercle, propriété qui donne en même temps deux points de la courbe, et de laquelle nous avons tiré son équation polaire.

On est naturellement conduit par cette seconde construction de la courbe par points, à sa description par un mouvement continu.

Si l'on conçoit un bras de levier BAF, d'une longueur égale à trois fois le rayon du cercle dans lequel on opère la trisection des angles, et qu'on assujétisse le point M du levier, à se mouvoir suivant la circonférence MRBR'M qui sera la directrice du mouvement, et ce bras de levier à passer continuellement par B dans toutes ses positions ; qu'on suppose en A et F deux points décrivans, ou deux styles, F décrira la branche FG, pendant que A décrira la branche ANB. Le levier étant arrivé dans la direction LKB ; par exemple, l'extrémité B aura été repoussée en B', de manière que la partie BB' ajoutée à BL fasse trois rayons, ou la longueur primitive BF. On a aussi Bl plus son prolongement BB' égal à trois rayons.

Le lieu des points B' est une nouvelle courbe qu'il importe d'examiner.

Lorsque les points décrivans F et A sont, le premier en G,

le second en B, ce qui arrive lorsque M a parcouru l'arc MRM′, le point B′ est sur le prolongement de la tangente GM′B, de manière que BB′ soit un rayon, puisque BG vaut deux rayons. Le point M arrivant en B, le style F est en H, le style A en D, et le point B′ en Y, ensorte que HY soit toujours trois fois le rayon. Lorsque le point M continue à se mouvoir suivant l'arc BR′M, le style A qui était en D, trace l'arc de trisectrice DEF, et le style F qui était en H, trace l'arc HBIA. Alors le bras de levier est placé en sens contraire, puisque le point décrivant F est en A, et que A est en F : conséquemment B, ou le point correspondant de la courbe des points B′, se trouve à gauche de F, c'est-à-dire, en X où se termine la courbe des points B′, à une distance AX du point A, égale à trois rayons, ou à une distance FX du point F, égale à un rayon.

Ainsi, avec deux styles, on décrit toute la trisectrice, le point M ne faisant qu'un tour de circonférence; et alors la courbe des points B′ n'est pas fermée.

Supposons maintenant qu'on n'ait que le seul style F, tout d'ailleurs restant le même : le point M ayant parcouru l'arc MRB, le point F a décrit FGH ; lorsque M a achevé son tour de circonférence, F qui était en H, a décrit HBIA, et le point B a tracé correspondamment la portion de courbe BB′B′YX. Alors le levier se trouve dans une position contraire, car B est en X et F en A, M est de retour en M. Ce point M continuant à se mouvoir suivant MRB, F qui est en A, décrit ANBD, de sorte que le point F est en D, et la courbe des points B′ se trouve tracée jusqu'à Y′. M qui est B, achevant son second tour de circonférence, le style que nous avons laissé en D, termine la trisectrice par l'arc DEF, de sorte que le levier se retrouve dans sa première position, c'est-à-dire que la courbe des points B′ vient se fermer en B.

Pour décrire la totalité de la trisectrice avec un seul style, il faut donc faire faire au point M deux tours de circonférence ;

mais alors, ainsi qu'on vient de le voir, la courbe des points B′ est fermée, et cette courbe est, comme la trisectrice, divisée symétriquement par la ligne BF. Nous avons cru inutile de tracer la totalité de la courbe des points B′, parce qu'il est facile d'en suivre le cours d'après sa génération.

Au moyen de cette courbe seule, on peut avoir un arc triple par son tiers; car Am étant l'arc donné, on mènera mBB′; puis, à partir de B′, on prendra B′K = rayon, et menant la ligne AK prolongée jusqu'à la circonférence en M′, on aura arc AmM′ = 3Am.

Archimède, dans ses lemmes, proposition VIII, a démontré ce théorème :

Fig. 254. Théorème LXXXI. *Si une corde AB d'un cercle est prolongée, et si l'on fait BC égal au rayon de ce cercle; si ensuite on joint le point C et le centre D du cercle, et si l'on prolonge CD jusqu'en E, l'arc AE sera le triple de l'arc BF.*

En effet, menons EG parallèle à AB, et joignons DB, DG. Puisque l'angle DEG est égal à l'angle DGE, l'angle CDG sera double de l'angle DEG. Mais l'angle BDC est égal à l'angle BCD, et l'angle CEG égal à l'angle ACE; donc l'angle CDG sera double de l'angle CDB, et l'angle entier BDG sera triple de l'angle BDC; donc l'arc AE qui est égal à BG, sera triple de l'arc BF.

Fig. 256. Il est aisé maintenant de déduire de là un procédé pour trouver le tiers d'un arc donné. On imaginera du point A des cordes AB à tous les points de la circonférence, et on prolongera chacune d'elles d'une longueur BC égale au rayon du cercle; le lieu des points C sera une courbe CC′C″, etc. Cette courbe étant construite, qu'on veuille trouver le tiers de l'arc AmE, on mènera par E et par le centre D une droite EFC prolongée jusqu'en C, puis on joindra C et A; l'arc BF ainsi déterminé, sera, d'après le théorème précédent, le tiers de l'arc AmE.

Pour avoir les points extrêmes M et N de la courbe, on mènera au point A une tangente indéfinie sur laquelle on prendra, à partir du point A, AM = AN = rayon. En effet, le triangle ADM étant isoscèle, l'arc AK est de 45°, tiers de l'arc AEL qui est de 135°. Cette courbe MCC'C"...N est une portion de la *trisectrice* complète, comme il est aisé de le reconnaître.

La trisectrice donne donc la solution graphique de ces deux énoncés :

1°. *Etant donnée la corde d'un arc, trouver celle de l'arc triple.*

2°. *Connaissant la corde de l'arc triple, trouver celle de l'arc simple*, ou *connaissant la corde d'un arc, trouver celle de son tiers.*

Pour écrire algébriquement cette dernière question, soient AO la corde d'un arc, et AC ou AE celle de son tiers. Ayant prolongé CB jusqu'à la rencontre de la circonférence en N, on aura deux cordes CN et AO qui se coupent dans un cercle et qui donnent cette propriété

$$AE \times EO = CE \times EN \ldots\ldots (1).$$

Mais d'ailleurs des triangles isoscèles semblables CAE, CAB, on déduit, en désignant le rayon AB par r,

$$CE = \frac{\overline{CA}^2}{r},$$

et on a

$$EN = r + EB, \quad EB = r - CE;$$

donc

$$EN = 2r - \frac{\overline{CA}^2}{r};$$

donc si l'on désigne l'arc AO par φ, et conséquemment l'arc AC par $\frac{1}{3}\varphi$, cord. $\frac{1}{3}\varphi$ par x et cord. φ par m, on trou-

vera, après les substitutions dans (1) et les réductions,

$$x^3-3r^2x+mr^2=0\ldots\ldots(2).$$

Mais si on veut en revenir à l'équation donnée par le problème de la trisection de l'angle, qu'on fasse $\cos\frac{1}{3}\varphi=y$ et $\cos\varphi=a$: on aura ces deux proportions

$$2r:x::x:r-y,\quad 2r:m::m:r-a,$$

d'où l'on déduit

$$x^2=2r(r-y);\quad m^2=2r(r-a):$$

multipliant (2) par x; faisant ensuite ces substitutions, puis élevant au quarré et réduisant, on trouve enfin

$$y^3-\frac{3}{4}r^2y=\frac{r^2a}{4},$$

et, dans l'hypothèse $r=1$,

$$y^3-\frac{3}{4}y-\frac{a}{4}=0\ldots\ldots(2),$$

équation qui a pour racines les cosinus des arcs tiers de ceux dont le cosinus est a.

Voyez, sur ce sujet, les *Recherches analytiques* que j'ai consignées à la suite d'un ouvrage sur *la Trisection de l'Angle*, par M. *Azémar* (*).

(*) Cet ouvrage se trouve à Paris, chez *Courcier*, imprimeur-libraire, quai des Augustins, n° 57.

Des Tangentes aux Courbes du premier ordre ou aux lignes du second degré.

La méthode que nous allons exposer, s'applique avec avantage à l'équation la plus générale du second degré entre deux variables.

Soit donc l'équation aux coordonnées rectangulaires

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \ldots\ldots (1);$$ Fig. 256.

le point M′ auquel on doit mener la tangente, ayant pour coordonnées x', y', ces coordonnées satisferont à l'équation générale (1); on aura donc en même temps

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0 \ldots\ldots (2).$$

L'équation de la sécante SM′M″, sera

$$(3) \ldots y - y' = a\,(x - x'), \text{ d'où } a = \frac{y - y'}{x - x'} \ldots (4),$$

où y et x représentent les coordonnées du second point d'insersection M″, et a désigne la tangente de l'angle fait par la sécante et l'axe AX des abscisses.

Or la portion M′M″ de la sécante peut être considérée comme un rayon vecteur dont l'origine fixe est M′. Si donc on désigne par r la longueur variable M′M″, et par φ l'angle dont la tangente est a, on trouvera

$$y - y' = r \sin\varphi, \quad x - x' = r \cos\varphi,$$

et de là

$$(5) \ldots y = y' + r \sin\varphi, \quad x = x' + r \cos\varphi \ldots\ldots (6),$$

Si donc on substitue dans (1) les valeurs (5) et (6), et qu'on réduise, d'après (2), le résultat de cette substitution, on

n'aura plus dans le reste que deux sortes de termes, les uns multipliés par r^2, les autres multipliés par r; ensorte que l'équation réduite pourra être mise sous la forme

$$r\,(r\mathrm{M}+\mathrm{N})=0.$$

Ces deux valeurs de r sont les distances de l'origine M′ aux deux intersections M′ et M″ de la courbe avec la sécante; l'une de ces valeurs de r est nulle, c'est la distance M′M′, et l'autre M′M″ est donnée par $r=-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}$. Mais si l'on veut que le point M″ vienne coïncider avec M′, auquel cas la sécante devient une tangente en M′, il faut anéantir la seconde valeur de r, c'est-à-dire, supposer $\mathrm{N}=0$.

On est donc conduit à ce calcul très-simple : En faisant dans (1) les substitutions (5) et (6), on omettra les termes indépendans de r qui reportent l'équation (2), et on ne calculera que les coefficiens de la première puissance de r, dont la somme égalée à zéro, donnera pour la détermination de φ, l'équation

$$\begin{gathered}2\mathrm{A}y'\sin\varphi+\mathrm{B}\,(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\\+2\,\mathrm{C}x'\cos\varphi+\mathrm{D}\sin\varphi+\mathrm{E}\cos\varphi=0,\end{gathered}$$

de laquelle on déduit, après la division par $\cos\varphi$,

$$\operatorname{tang}\varphi=a=-\frac{\mathrm{B}y'+2\mathrm{C}x'+\mathrm{E}}{2\mathrm{A}y'+\mathrm{B}x'+\mathrm{D}}\ldots\ldots(7).$$

Cette valeur reportée dans (3) donne cette équation de la tangente

$$y-y'=-\frac{\mathrm{B}y'+2\mathrm{C}x'+\mathrm{E}}{2\mathrm{A}y'+\mathrm{B}x'+\mathrm{D}}(x-x')\ldots(8),$$

dans laquelle x et y sont les coordonnées variables des points de la tangente, en observant que le rapport de ces coordonnées est le même que celui des coordonnées du point M″ qui, d'abord sur la sécante, est maintenant sur la tangente.

L'équation (8) doit se changer en (2) pour $x=x'$ et $y=y'$; c'est ce qui arrive en effet, car elle devient d'abord, après la multiplication par le dénominateur, et la transposition de tous les termes dans le premier membre,

$$\begin{aligned}&2Ay'^2 + 2Bx'y' + 2Cx'^2 + Dy' + Ex' = 0\\ &-2Ay'^2 - 2Bx'y' - 2Cx'^2 - Dy' - Ex',\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' = 0\\ &= Ay'^2 - Bx'y' - Cx'^2 - Dy' - Ex'.\end{aligned}$$

Or la ligne inférieure n'étant autre chose que F, à raison de l'équation (2), on trouvera donc

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0.$$

Pour les courbes qui admettent un centre, l'équation générale peut toujours être rappelée à cette forme très-simple (Géom. analyt., chap. VIII)

$$My^2 + Nx^2 + P = 0,$$

qui n'est que la proposée, en y faisant $A=M$, $B=0$, $C=N$, $D=0$, $F=0$, $F=P$, et alors

$$\text{tang}\ \varphi = a = -\frac{Nx'}{My'}.$$

Telle est en effet, pour ce cas, la valeur connue de la tangente trigonométrique de l'angle fait par sa tangente avec l'axe.

Pour les courbes rapportées à un axe principal et à une origine prise au sommet, l'équation générale est de la forme

$$My^2 + Nx^2 + Px = 0,$$

et alors $A=M$, $B=0$, $C=N$, $D=0$, $E=P$, $F=0$; d'où l'on déduit

$$\text{tang}\ \varphi = a = -\frac{Nx' + P}{My'}.$$

Pour $N = 0$, ce qui est le cas de la parabole,

$$\text{tang}\, \varphi = a = -\frac{P}{My'}.$$

Aux points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des y, ou perpendiculaire à celui des x, la tangente trigonométrique a devient infinie. Ainsi, d'après l'expression (7), on a, pour ces points, la relation

$$2Ay' + Bx' + D = 0; \quad \text{d'où} \quad y' = -\frac{B}{2A}x' - \frac{D}{2A}.$$

Si l'on porte en place de y' cette valeur dans l'équation (a), et qu'on la résolve, on obtiendra deux racines x' dont l'une est *maximum* et l'autre *minimum*; ces abcisses seront celles des points extrêmes de la courbe dans le sens de l'axe des abscisses. Pour la parabole caractérisée par $B^2 - 4AC = 0$, les deux valeurs de x se réduiront à une seule. Quant aux points extrêmes de la courbe, dans le sens des y, on les déduirait de l'égalité à zéro du numérateur (7), c'est-à-dire de l'équation

$$By' + 2Cx' + E = 0,$$

combinée avec l'équation (a).

On pourrait proposer de mener par un point extérieur une tangente aux courbes de l'équation (1); mais les calculs sont tellement pénibles qu'on ne peut les effectuer que dans des hypothèses sur les coefficiens, qui altèrent la généralité de l'équation.

FIN.

NOTES.

Sur la Proposition VII, Liv. IV des Réciproques.

La démonstration suivante est due à M. *Poullet-Delisle*, professeur au lycée d'Orléans.

Soient AB l'un des côtés du polygone inscrit A, *ab* le côté homologue du polygone circonscrit B, AC un côté du polygone inscrit A′, et *mn* le côté homologue du polygone circonscrit B′. Soient α l'angle BOC, et k le nombre des côtés des polygones A et B : on aura Fig. 257.

$$A = k \cdot \text{tri } AOB, \quad B = k \cdot \text{tri } aOb$$
$$A' = 2k \cdot \text{tri } AOC, \quad B' = 2k \cdot \text{tri } mOn,$$

et on trouvera facilement

$$\text{tri } AOB = \tfrac{1}{2}\,\overline{OA}^2 \cdot \sin 2\alpha = \overline{OA}^2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha$$
$$\text{tri } aOb = \tfrac{1}{2}\,\overline{Oa}^2 \cdot \sin 2\alpha = \overline{OA}^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\text{tri } AOC = \tfrac{1}{2}\,\overline{OA}^2 \cdot \sin\alpha$$
$$\text{tri } mOn = \tfrac{1}{2}\,\overline{Om}^2 \cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{2}\,\overline{OA}^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha},$$

en observant que

$$Oa = \frac{OA}{\cos\alpha}, \qquad Om = \frac{OA}{\cos \frac{1}{2}\alpha};$$

donc

$$A = k \cdot \overline{OA}^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha\,; \quad B = k \cdot \overline{OA}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

$$A' = k \cdot \overline{OA}^2 \cdot \sin \alpha\,, \qquad B' = k \cdot \overline{OA}^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

On tire de là, 1°

$$\frac{A}{A'} = \cos \alpha\,, \quad \frac{A'}{B} = \cos \alpha\,,$$

et partant

$$A' = \sqrt{A \times B}.$$

2°.

$$\frac{A'}{B'} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{2A'}{B'} - 1 = \frac{A}{A'},$$

et conséquemment

$$B' = \frac{2A'^2}{A+A'} = \frac{2AB}{A+A'}.$$

Sur le Théorème VIII, recueil de Théorèmes et de Problèmes.

Fig. 258. *Le quarré de l'hypoténuse est égal à la somme des quarrés construits sur les deux autres côtés de l'angle droit.*

Soit le triangle BAC rectangle en A; prolongez de part et d'autre les côtés AB et AC, de manière que chacune des droites AD et AP soit égale à la somme BA + AC, et que chacune des droites AH et AL soit égale à la même somme; et achevez les quarrés AF et AN; divisez chaque côté du quarré AF en deux parties telles qu'on ait

$$HI = FG = DE = BA\,; \quad AI = HG = FE = DB = AC,$$

ce qui est possible, puis tirez les lignes BE, EG, GI, IB : menez la droite CO parallèle à AP, et ayant pris sur AP la longueur AR = AC, tirez la parallèle RM à AL.

Le quarré AF est égal au quarré AN, par construction; d'ailleurs les quatre triangles construits dans AF sont égaux aux quatre triangles RPO, ROS, SCL, SLM construits dans AN : car ces triangles sont rectangles, et les deux côtés qui comprennent l'angle droit, sont égaux aux côtés AB et AC. Si donc on retranche les quatre triangles de chacun des deux quarrés, les restes BIGE et ARSC + SMNO seront égaux. Or le quadrilatère BIGE a ses quatre côtés égaux chacun à l'hypoténuse BC; de plus l'angle extérieur IBD est égal à la somme des angles BIA + IAB; donc, à cause de l'angle EBD = BIA, il reste l'angle IBE = IAB; donc l'angle IBE est droit, et on démontrera la même chose à l'égard des angles en I, G et E. Donc ce quadrilatère est égal au quarré construit sur BC; d'ailleurs le quarré AS est construit sur AC, et le quarré SN est égal au quarré construit sur AB, à cause de

$$SM = SO = ON = NM = CL = AC + AB - AC = AB.$$

Donc, etc.

Fig. 259.

Soit un triangle quelconque ABC; que sur les côtés AC et AB, on construise deux parallélogrammes quelconques CE, BF; qu'on en prolonge les côtés DE, KF jusqu'à leur rencontre en H; que par H et par A on mène la ligne HA prolongée jusqu'à la rencontre de BC en L; qu'on prolonge AL de LM = HA, puis qu'on construise le parallélogramme BN dont le côté CN soit égal et parallèle à LM; je dis que l'aire de ce parallélogramme est égale à la somme des aires des parallélogrammes BF et CE.

Prolongez les côtés NC, OB jusqu'à ce qu'ils rencontrent DE, KF en R et P, et tirez PR. Les lignes CR et AH sont égales, comme parallèles comprises entre les parallèles CA, DH;

donc CR = LM et BP = LM ; donc la ligne CR est égale et parallèle à BP, et conséquemment la figure CRBP est un parallélogramme égal en surface au parallélogramme BN. Il est évident que les parallélogrammes RL et CRHA sont équivalens, puisqu'ils ont même base RC, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles. Par la même raison, les parallélogrammes PL et BPHA sont équivalens ; donc CRPB ou CBON = CRHA + BPHA = CDEA + BKFA. Donc, etc.

Sur les triangles en général.

1°. *Soit ASA' un triangle quelconque auquel est inscrit un cercle dont le centre est z, et qui touche les trois côtés du triangle en* t, t', t'' *: soit décrit un autre cercle dont le centre est* Z *qui touche en* T, T', T'' *les prolongemens des côtés* SA, SA', *et le revers du côté* AA' *; la longueur* ST *sera le demi-contour du triangle* ASA', *et les droites* AT, St, At *seront respectivement les excès du demi-contour sur les côtés* SA, AA', SA.

Fig. 260.

En effet,

$$ST = ST', \quad St = St', \quad \text{donc} \quad tT = t'T' ;$$

or

$$tT = At + AT = At'' + AT'', \text{ et } t'T' = A't' + A'T' = A't'' + A'T'' ;$$

donc

$$At'' + AT'' = A't'' + A'T'',$$

d'où

$$2At'' + t''T'' = 2AT'' + T''t'' \quad \text{et} \quad At'' = A'T'',$$

partant

$$AT'' = A't'' ;$$

Soit le contour $ASA' = C$, on aura

$$C = 2St + 2At + 2A't' = 2St + 2At + 2AT;$$

donc

$$St + At + AT = \tfrac{1}{2} C,$$

d'où

$$AT = \tfrac{1}{2} C - SA, \quad At = \tfrac{1}{2} C - SA', \quad St = \tfrac{1}{2} C - AA',$$

Donc, etc. On peut déduire de là plusieurs autres propriétés.

2°. *Dans tout triangle, le rectangle des excès du demi-contour, sur les deux côtés d'un angle, est égal au rectangle du rayon du cercle inscrit à ce triangle et du rayon de celui des cercles inscrits en dehors, qui est situé dans le même angle.*

En effet, soient menées les droites zA, ZA : les angles zAt, ZAT sont les moitiés des angles SAA', $A'AT$, et partant la somme de ces angles vaut un droit. Donc les triangles rectangles zAt, ZAT sont équiangles, et conséquemment

$$zt : AT :: At : ZT, \quad \text{d'où} \quad AT \times At = zt \times ZT.$$

3°. *Dans tout triangle, le rectangle des deux côtés d'un angle, est égal au rectangle des distances de son sommet au centre du cercle inscrit et au centre de celui des cercles inscrits en dehors, qui est situé dans le même angle.*

Soient menées les droites zA' et ZA'. Dans le quadrilatère $AzA'Z$, les angles opposés ZAz, $ZA'z$ sont droits l'un et l'autre ; donc ce quadrilatère est inscriptible, et les angles zAA', zZA' sont égaux entre eux ; donc aussi les angles SZA', SAz sont égaux entre eux : mais les angles ZSA', zSA sont aussi égaux ; donc les triangles ZSA', ASz sont équiangles et donnent

$$SZ : AS :: A'S : Sz, \quad \text{d'où} \quad SA \times SA' = SZ \times Sz.$$

4°. *Dans tout triangle, le rectangle des deux côtés d'un angle, est au rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé à cet angle, comme le quarré du rayon est au quarré du cosinus de la moitié de cet angle.*

On a

$$Sz : St :: 1 : \cos \tfrac{1}{2} S, \quad SZ : ST :: 1 : \cos \tfrac{1}{2} S;$$

donc

$$SZ \times Sz : ST \times St :: 1^2 : \cos^2 \tfrac{1}{2} S,$$

d'où (1° et 3°)

$$SA \times SA' : \tfrac{1}{2} C (\tfrac{1}{2} C - AA') : 1^2 : \cos^2 \tfrac{1}{2} S.$$

5°. *Dans tout triangle le rectangle des deux côtés d'un angle, est au rectangle des excès du demi-contour sur les côtés de cet angle, comme le quarré du rayon est au quarré du sinus de la moitié de cet angle.*

Les deux triangles Szt, SZT donnent les proportions

$$Sz : zt :: 1 : \sin \tfrac{1}{2} S, \quad SZ : ZT :: 1 : \sin \tfrac{1}{2} S;$$

donc

$$SZ \times Sz :: ZT \times zt :: 1^2 : \sin^2 : \tfrac{1}{2} S,$$

c'est-à-dire

$$SA \times SA' : \tfrac{1}{2} (C - SA) (\tfrac{1}{2} C - SA') :: 1^2 : \sin^2 \tfrac{1}{2} S.$$

6°. *Dans tout triangle, le rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé à un angle, est au rectangle des excès du demi-contour sur les côtés de cet angle, comme le quarré du rayon est au quarré de la tangente de la moitié de cet angle.*

Les deux triangles Szt, SZT donnent encore

$$St : tz :: 1 : \tang \tfrac{1}{2} S, \quad ST : TZ :: 1 : \tang \tfrac{1}{2} S;$$

donc

$$ST \times St : TZ \times tz :: 1^2 : \tang^2 \tfrac{1}{2} S,$$

ou (2°)

$$\tfrac{1}{2} C (\tfrac{1}{2} C - AA') : (\tfrac{1}{2} C - SA)(\tfrac{1}{2} C - SA') :: 1^2 : \tang^2 \tfrac{1}{2} S.$$

7°. *Dans tout triangle, le rectangle des deux côtés d'un angle, est au double de la racine quarrée du produit du demi-contour et des excès de ce demi-contour sur les côtés de l'angle, comme le rayon est au sinus de cet angle.*

Puisque (5°, 2° et 3°, 4° et 3°)

$$\sin \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{TA \times At}{SA \times SA'}}, \quad \cos \tfrac{1}{2} S = \sqrt{\frac{ST \times St}{SA \times SA'}},$$

on a

$$\sin S = 2 \sin \tfrac{1}{2} S . \cos \tfrac{1}{2} S = \frac{2 \sqrt{\{ST \times TA \times At \times St\}}}{SA \times SA'}.$$

8°. *La surface d'un triangle est la racine du produit du demi-contour par les excès du demi-contour sur chacun des côtés.*

On a

$$SA \times SA' \times \sin S = 2 \sqrt{(TA \times At \times ST \times St)};$$

mais

$$SA . SA' \times \sin S = 2 \text{ surf } ASA';$$

donc

$$\text{surf } ASA' = \sqrt{\{ST \times TA \times At \times St\}}$$
$$= \sqrt{\{\tfrac{1}{2} C (\tfrac{1}{2} C - SA)(\tfrac{1}{2} C - SA')(\tfrac{1}{2} C - AA')\}},$$

proposition démontrée (pag. 264 et suiv.)

9°. *Dans tout triangle, le rayon est à la tangente de la*

moitié d'un angle, comme le rectangle du demi-contour par l'excès du demi-contour sur le côté opposé, est à la surface du triangle.

Le triangle ASA′ est composé des triangles SzA, AzA′, SzA′; ainsi en observant que le demi-contour est ST, sa surface sera $= \mathrm{ST} \times tz$: d'ailleurs on a trouvé (6°) $tz = St \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{S}$; donc

$$\operatorname{surf} \mathrm{ASA}' = \mathrm{ST} \times tz = \mathrm{ST} \times St \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{S}.$$

10°. Soit h la hauteur du triangle ASA′, en prenant AA′ pour base, on a

$$2 \operatorname{surf} \mathrm{ASA}' = h \times \mathrm{AA}'; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{2\mathrm{ST} \,.\, St \times \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{S}}{\mathrm{AA}'}.$$

L'utilité de ces formules se fait principalement remarquer dans la Trigonométrie. M. *Lhuilier*, dans l'ouvrage que nous avons déjà cité, en a déduit cette expression remarquable de la surface d'un triangle :

$$\text{surf.} = \sqrt{r\mathrm{RR'R''}},$$

r, R, R′, R″ étant les rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits, c'est-à-dire, des cercles qui touchent les prolongemens de deux côtés et le revers du troisième : il en a encore conclu la solution des questions suivantes dont plusieurs ont été traitées dans cet ouvrage.

Construire un triangle, connaissant la base, l'angle au sommet et la somme des côtés.

Construire un triangle dont on connaît la base, l'angle au sommet et la différence des côtés.

Construire un triangle dont on connaît la base, la hauteur et la somme des côtés.

Soit un point P donné sur le plan d'un angle donné ASA′, mener par ce point une droite AA′ qui retranche de cet angle un triangle ASA′ dont le contour soit donné.

Construire un triangle, connaissant la hauteur, l'angle au sommet, et la somme des côtés de cet angle.

Construire un triangle, connaissant la hauteur, l'angle au sommet et la différence des côtés de l'angle.

Construire un triangle, connaissant la hauteur, l'angle au sommet et l'excès de la somme des côtés sur la base.

Construire un triangle, connaissant la hauteur, la somme ou la différence des deux côtés, et la différence des angles à la base.

Construire un triangle, connaissant un angle, la surface et le contour.

Construire un triangle, connaissant un angle, la surface et l'excès de la somme des côtés de l'angle sur le côté opposé.

Sur le Problème XX.

Etant donnée la différence AB entre la diagonale et le côté d'un quarré, construire ce quarré.

Après avoir mené une ligne AE sous un angle avec AC, égal à la moitié d'un droit, le problème se réduit à trouver sur le prolongement de AB un point C tel, que la perpendiculaire CE à AE, soit égale à BC.

A cet effet, par le point B on élevera une perpendiculaire BG à AE, laquelle déterminera le point D; par D on tirera la droite DF parallèle à AC et égale à DB; par B et F, la droite BF qui, prolongée, rencontrera en E la droite AE; par E, une perpendiculaire à AE qui coupera AC dans le point C cherché. Fig. 271.

Si par E on mène EG parallèle à BC, et conséquemment à DF, à cause du triangle isoscèle BDF, on aura EG=BG =CE=BC, et de plus, comme l'angle en B est égal à la moitié d'un droit, on aura CE= AE. Donc si l'on mène par C et

par A des parallèles aux côtés AE et CE, on achèvera le quarré demandé.

Sur les polygones réguliers.

Si du centre de figure et à tous les sommets d'un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, on abaisse des perpendiculaires sur une droite quelconque, la perpendiculaire menée du centre, prise autant de fois qu'il y a de sommets, est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de ces sommets.

Tout point pris dans l'intérieur d'un polygone, et qui est tel, que toutes les droites menées par ce point et terminées à son contour, s'y trouvent divisées en deux parties égales, s'appelle *centre de figure.*

Soient un hexagone régulier ABCDEF et O son centre de figure : si de O et des sommets on mène des perpendiculaires sur une droite XX, on aura

$$6O = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff.$$

Fig. 262. En effet, si par M milieu de BA et par O, on mène la transversale MON, elle ira passer par le milieu N de DE, et si des points M et N on abaisse les perpendiculaires Mm, Nn sur l'axe XX, on aura

$$2Oo = Mm + Nn\,;$$

de même

$$2Mm = Bb + Aa\,, \quad 2Nn = Dd + Ee\,,$$

donc

$$4Oo = Bb + Aa + Dd + Ee.$$

La droite CF passera par O, donc

$$2Oo = Cc + Ff\,,$$

et conséquemment

$$6Oo = Aa + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff.$$

Cette propriété a fait nommer le point O, *centre des moyennes distances des sommets du polygone.* Ce centre existe toujours dans les polygones réguliers d'un nombre pair de côtés, puisque ces polygones admettent un centre de figure.

Tout polygone régulier d'un nombre impair de côtés, n'a pas de centre de figure.

Soit un polygone régulier ABCDE d'un nombre impair de côtés, par exemple, de cinq côtés : le centre O du cercle circonscrit ne peut être son centre de figure, parce qu'en menant la droite DOp, on n'a pas Op = OD. Soit, s'il est possible, O′ le centre cherché ; on aurait donc CO′ = O′r, DO′ = O′q ; conséquemment les deux triangles DO′r, CO′q seraient égaux, d'où l'on déduirait Cq = Dr ; or Dr > DE, parce que l'angle DEA est plus grand qu'un droit ; donc on aurait Cq > DE, conclusion absurde, puisque le polygone étant régulier, tous ses côtés sont égaux. Cette proposition trouve son application dans la détermination des centres de gravité des contours et des aires des polygones réguliers. Fig. 263.

Soit un polygone régulier d'un nombre de côtés, impairement pair, c'est-à-dire tel, que sa moitié soit un nombre impair : prenons, par exemple, le polygone régulier de dix côtés, et désignons ces côtés par a, b, c, d, e, f, g, h, i, k ; si l'on joint les milieux des côtés a et c, c et e, e et g, g et i, i et a, on aura un polygone régulier d'un nombre impair de côtés. Mais, d'après le théorème précédent, si des milieux des côtés a, c, e, g, i, qui sont les sommets du polygone intérieur ou de cinq côtés, on abaisse des perpendiculaires sur une droite menée d'une manière quelconque en dehors des polygones, le double de la somme de ces perpendiculaires, qui vaut la somme de toutes les perpendiculaires abaissées

des sommets du polygone de dix côtés, sera égal à dix fois la perpendiculaire abaissée du centre de figure de ce dernier polygone sur la droite, et conséquemment la somme des perpendiculaires abaissées des sommets du pentagone régulier sur cette droite, sera égale à cinq fois la perpendiculaire abaissée sur la même droite du centre de figure ou du centre des moyennes distances du décagone régulier inscrit au même cercle. Il est bien facile de voir que cette propriété a lieu en passant d'un polygone d'un nombre de côtés, impairement pair, à un polygone dont le nombre des côtés est moitié de celui-là. Ainsi les polygones réguliers d'un nombre impair de côtés, admettent aussi *un centre des moyennes distantes*. (Voyez la première partie du nouvel ouvrage de M. *Lhuilier*, ayant pour titre : *Élémens d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique, appliquées à la recherche des lieux géométriques*.

Sur les Contacts.

Mener un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée en un point donné.

Fig. 264. Soient C le centre du cercle donné et N le point donné sur la droite AB; au point N on élevera la perpendiculaire OK, sur laquelle on prendra NK = CM rayon du cercle donné; on joindra CK, et par N on lui mènera la parallèle NM qui rencontrera le cercle donné au point M de contact. En effet, ayant mené la droite CM prolongée jusqu'à la rencontre de KN en O; à cause de NK = MC, par construction, on aura ON = OM. Donc le cercle décrit de O comme centre, avec ON comme rayon, touchera d'abord la droite AB au point N, et le cercle donné en M, puisque la distance OC des centres est égale à OK qui est la somme des rayons.

Mener une tangente commune à deux cercles donnés.

Sur la distance GF des deux centres comme rayon, décrivons la demi-circonférence FPG, et du point F comme centre, un arc de cercle d'un rayon FQ égal à la différence des rayons des cercles donnés : par le point P de rencontre de la demi-circonférence et de l'arc de cercle, menons le rayon FO qui détermine sur la circonférence du plus grand des deux cercles donnés, le point O par lequel doit être menée leur tangente commune. Fig. 265.

En effet, l'angle FPG est droit; donc la droite OL est parallèle à PG, et elle en est distante d'une quantité OP = NG rayon du petit cercle : donc la droite ON est tangente en N au petit cercle.

Sur la Pyramide triangulaire.

Trouver parmi les pyramides triangulaires qui ont même volume et même angle solide trièdre au sommet, celle dont la base est un minimum.

Je désigne par s la base de la pyramide tétraèdre, par s', s'', s''' ses faces, par p, q les arêtes ascendantes de la face s', comprenant entre elles l'angle a; par p, r celles de la face s'', comprenant entre elles l'angle b, par q, r celles de la face s''', comprenant l'angle c, et par A, B, C les angles dièdres de ces faces entre elles, angles respectivement opposés aux faces s', s'', s'''. On sait (Rec. de Théor. et Prob., Théor. LXXIV) qu'on a

$$s^2 = s'^2 + s''^2 + s'''^2 - 2s's''\cos C - 2s's'''\cos B - 2s''s'''\cos A.$$

Dans le cas particulier de l'égalité des angles dièdres A, B, C, l'équation précédente se changera dans celle-ci,

$$s^2 = \frac{(s'-s'')^2 + (s''-s''')^2 + (s'''-s')^2}{2}$$
$$+ (s's'' + s''s''' + s'''s')(1 - 2\cos A),$$

expression qui devient un *minimum* pour $s' = s'' = s'''$.

La solution complète de cette question ne peut être fournie que par le calcul différentiel. (Voyez le n° 9 de *la Correspondance sur l'Ecole impériale Polytechnique.*)

Sur le Problème LXXXV et sur le Théorème LIV.

Fig. 266. *Dans un parallélepipède quelconque, si des extrémités A, A', A'' des trois arêtes contiguës à un même angle solide trièdre S, on mène sur la diagonale Ss des perpendiculaires Ap, A'p', A''p'', la somme* $Sp + Sp' + Sp'' = Ss$.

En effet, les arêtes AS, A'''s étant égales et parallèles, leurs projections Sp, sp''' sur la droite Ss, déterminées par les perpendiculaires Ap, $A'''p'''$ sont égales : par la même raison, si l'on mène les perpendiculaires $A^{IV}p^{IV}$, $A''p''$ sur Ss, on a

$$sp^{IV} = p'''p'' = Sp',$$

et conséquemment

$$Sp + Sp' = sp''' + p'''p'' = sp'' :$$

donc

$$Ss = sp'' + Sp'' = Sp + Sp' + Sp'' \ldots\ldots (1).$$

Corollaire Ier. Mais

$$Sp = SA \cdot \cos ASs,\quad Sp' = SA' \times \cos A'Ss,$$
$$Sp'' = SA'' \cos A''Ss,$$

donc l'égalité (1) devient

$$Ss = SA \cos ASs + SA' \cos A'Ss + SA'' \cos A''Ss \ldots\ldots (2).$$

Ainsi *la diagonale d'un parallélepipède quelconque peut être*

exprimée au moyen des trois arêtes de ce parallélepipède, contiguës à l'une des extrémités de cette diagonale et des angles que ces arêtes font avec la même diagonale.

Corollaire II. Les triangles ASs, $A'Ss$, $A''Ss$ donnent

$$\left.\begin{aligned}
\cos ASs &= \frac{\overline{SA}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{As}^2}{2SA\,.\,Ss} = \frac{\overline{SA}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{SA'''}^2}{2SA\,.\,Ss}\\
\cos A'Ss &= \frac{\overline{SA'}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{A's}^2}{2SA'\,.\,Ss} = \frac{\overline{SA'}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{SA^{IV}}^2}{2SA'\,.\,Ss}\\
\cos A''Ss &= \frac{\overline{SA''}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{A''s}^2}{2SA''\,.\,Ss} = \frac{\overline{SA''}^2 + \overline{Ss}^2 - \overline{SA^{V}}^2}{2SA''\,.\,Ss}
\end{aligned}\right\}(3)$$

Si l'on reporte ces valeurs des cosinus dans la relation (2), on trouve de suite

$$\overline{Ss}^2 = (\overline{SA'''}^2 + \overline{SA^{IV}}^2 + \overline{SA^{V}}^2) - (\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SA''}^2).$$

Ainsi *dans tout parallélepipède, le quarré d'une diagonale est égal à l'excès de la somme des quarrés des trois diagonales des faces qui partent de l'une de ses extrémités, sur la somme des quarrés des arêtes qui aboutissent à la même extrémité.*

Corollaire III. On a aussi

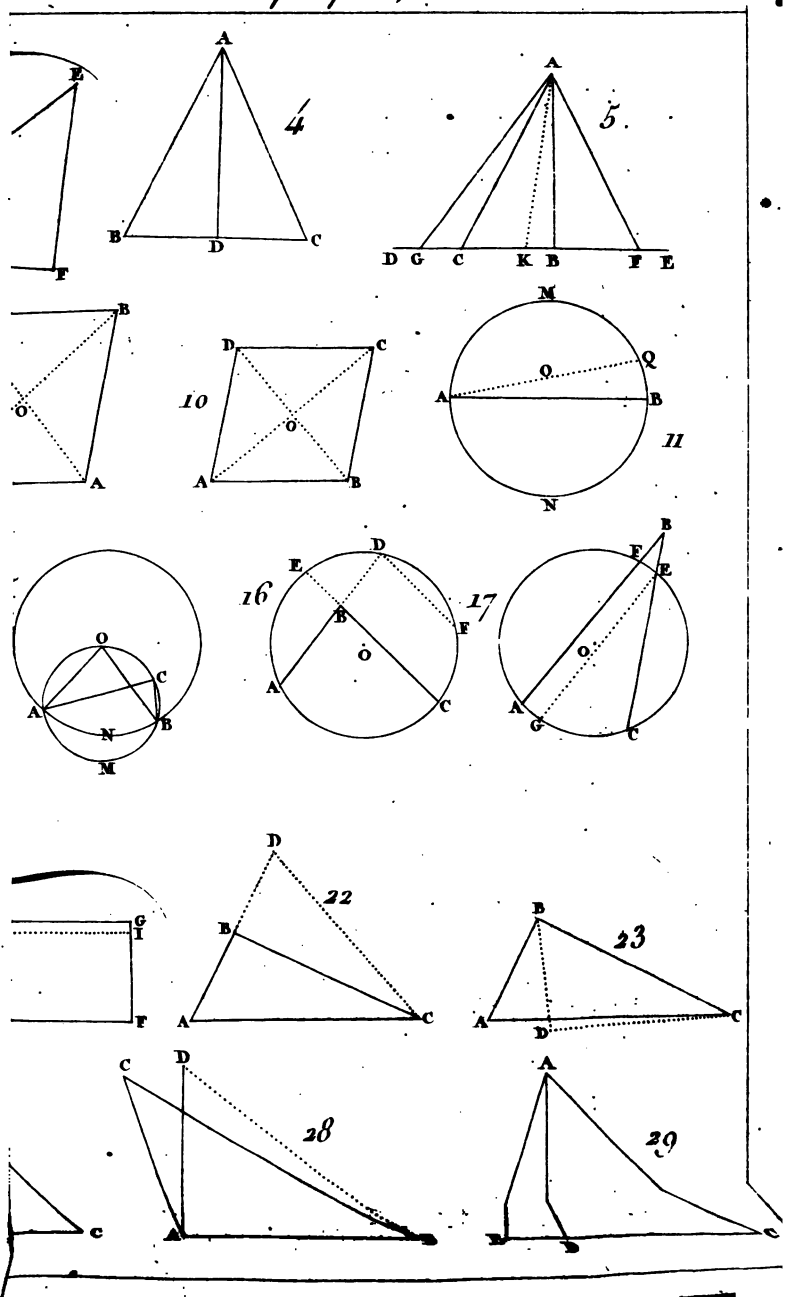
$$\begin{aligned}
\overline{SA'''}^2 &= \overline{SA'}^2 + \overline{SA''}^2 - 2SA'\,.\,SA'' \cos A'SA''\\
\overline{SA^{IV}}^2 &= \overline{SA}^2 + \overline{SA''}^2 - 2SA\,.\,SA'' \cos ASA''\\
\overline{SA^{V}}^2 &= \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 - 2SA\,.\,SA' \cos ASA'
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\overline{SA'''}^2 + \overline{SA^{IV}}^2 + \overline{SA^{V}}^2) - (\overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SA''}^2) &= \overline{Ss}^2\\
= \overline{SA}^2 + \overline{SA'}^2 + \overline{SA''}^2 &- 2SA.SA'.\cos ASA'\\
&- 2SA.SA''.\cos ASA''\\
&- 2SA'.SA''.\cos A'SA''.
\end{aligned}$$

Donc, *dans tout parallélepipède, le quarré d'une diagonale est égal à l'excès de la somme des quarrés des trois arêtes qui partent d'une de ses extrémités, sur le double de la somme de leurs produits, deux à deux, par les cosinus de leurs inclinaisons entre elles.*

FIN DES NOTES.



E
F
A
B
D
C
4
A
5.
D
G
C
K
B
F
E
B
O
A
D
C
10
O
A
B
M
Q
O
A
B
11
N
O
C
A
N
B
M
E
D
16
B
O
F
17
A
C
B
F
E
O
A
G
C
D
22
B
A
C
G
I
F
B
23
A
D
C
C
D
28
A
B
C
A
29
B
D
C

